1 零章！预　识

§0.1 概率空间

- 随　试验= 概率空间(; $\mathscr{F}$; P).
- 样　空间/　集/所有试验结　：　.
- 样　/：/试验结　：$!$,
- 事件/ f 集: $A; B; \cdots$.　于$!$　5　/要求.
- 　代数: $\mathscr{F}$. 集　系, 满 v n 条 5　.
- 集　系$\mathscr{E}$ 生成　代数:　$(\mathscr{E}) := \bigcap_{\mathscr{F}\text{是}\sigma\text{代数},\mathscr{F}\ldots\mathscr{E}} \mathscr{F}$.
- 一般/,　可　为非空集$\mathbb{X}$, 称$(\mathbb{X}; \mathscr{F})$ 为可　空间.
- 　.　Ñ . . $\mathbb{X}$ 可数; 默认 $\mathscr{F} = 2^{\mathbb{X}} := \{A : A \subseteq \mathbb{X}\}$.
- 　.　Y . . $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, 默认 $\mathscr{F} = \mathscr{B} :=$　(开集) =　(区间).

- 概率: P. $\mathscr{F}$ þ 数, 满 v n 条 5 :

  非负 ! 范 ! 可列可加 5 .

- 一般 / , 设($\mathbb{X}$; $\mathscr{F}$) 为可 空间. e : $\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ $\cup \{\infty\}$ 满 v

  $(\emptyset) = 0$! 可列可加 5 ,

  则称 为$\mathscr{F}$ ($\mathbb{X}$) þ Ý .

- 概率是 Ý , 也称概率 Ý .
- e $0 < (\mathbb{X}) < \infty$, 则有限 Ý 可 一 为概率 Ý ^.

$$^(A) := \frac{(A)}{(\mathbb{X})}; \quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- . Ñ . . $\mathbb{X}$ 可数.

  概率 é 应$\mathbb{X}$ þ (概率)分 列 $\{ \ _i : i \in \mathbb{X}\}$. (Ý 似.)

$$_i = (\{i\}), \quad \forall i \in \mathbb{X}.$$

- . Y . . $(\mathbb{R};\mathscr{B})$. 称$\mathbb{R}$ þ 概率 Ý 为分 .
- 分 数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满 v n 条 5 :
  单 N þ 升 ! 范$(F(\infty)=1$ & $F(-\infty)=0)$! 右 Y .
- 5: F 是分 数; $\mathscr{E}=\{(-\infty;x]:x\in\mathbb{R}\}$ é 交运算封 , 即

$$A;B\in\mathscr{E}\Rightarrow AB\in\mathscr{E};$$

且 $(\mathscr{E})=\mathscr{B}$. 在$(\mathbb{R};\mathscr{B})$ þ 存在唯一 分 满 v

$$F(x)=\ ((-\infty;x]);\quad x\in\mathbb{R}:$$

- 分 数$F\longleftrightarrow$ 分 .
- ½ : e $\mathscr{E}$ é 交运算封 且 $|_{\mathscr{E}}=$ ^$|_{\mathscr{E}}$, 则 $|_{\sigma p\mathscr{E}q}=$ ^$|_{\sigma p\mathscr{E}q}$.

§0.2 从随 随 程

- 随 $X : \to \mathbb{R},\ ! \mapsto X(!)$, 满 v 可 5 要求:

$$\{X \leqslant x\} := \{! : X(!) \leqslant x\} \in \mathscr{F}; \quad \forall x:$$

- Ñ . 随 . X 范围为可数集 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$.
- : : X 分 /分 列.

$$\{P(X = x) : x \in \mathbb{X}\}:$$

- 5: ½ 义随 X 时 I 要(; $\mathscr{F}$), I 要概率P.
  一般情况是X 出 g 某概率模 . , 因此有默 @ P.
- 5 :可 5 要求:

$$\{X = x\} \in \mathscr{F}; \quad \forall x \in \mathbb{X}:$$

- 5: 仅 I 5 P 在 $(X) := (\{\{X = x\} : x \in \mathbb{X}\})$ þ 限 .
- 5: (X) 是使 X 可 • 代数.

概率论课程中 离散型随机变量.

- ：分 ：

$$P(X = 1) = p; \quad P(X = 0) = 1 - p:$$

- 二项分 $B(n;p)$:

$$P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n \quad i}; \quad i = 0;1;\cdots;n:$$

- 松分 ：

$$P(X = n) = \frac{n}{n!} e^{\quad \lambda}; \quad n = 0;1;\cdots$$

- 几 分 ：

$$P(X = n) = (1-p)^{n \quad 1} p; \quad n = 1;2;\cdots$$

- G态.

  . 硬 , $S = \{H; T\}$.

  . 投骰f, $S = \{$,橙, ,绿, ,b$\}$.

  ① ②

- 位 .

  . $S = \{1; \cdots ; 5\}$.

  X = (静态) f 位 .

  ③ ④

- . 设X 服从 松分 :

  ⑤

$$P(X = n) = \frac{n}{n!} e^{\lambda}; \quad n = 0; 1; \cdots$$

解为: 将 f 按以 þ 分 列 于$\mathbb{Z}$ 随 位 X.

离散型随机向量.

- 随 试验/概率模 .: (;$\mathscr{F}$;P). 设S 为非空 可数集.
- 随 向 $X = (X_1; \cdots ; X_n)$. , X_m : $\to S$, $\forall m$.
- X 于S^n Ñ . 随 .

$$S^n := \{x = (x_1; \cdots ; x_n) : x_1; \cdots ; x_n \in S\};$$

$$x = X(!); \quad (x_1; \cdots ; x_n) = (X_1(!); \cdots ; X_n(!)):$$

- 称X (在S^n þ)分 为n 维 分 . (缘/条件分 .)
- 5: 仅 I 5P 在 (X) þ 限 ,

$$(X) = (X_1; \cdots ; X_n) := \left(\{\{X = x\} : x \in S^n\}\right)$$

$$= \left(\{\{X_m = i\} : 1 \leqslant m \leqslant n; i \in S\}\right):$$

- 5: (X) 为使 所有X_m 均可 • 代数.
- 5: 似/, 可设$S_1; \cdots ; S_n$ 均为可数集, X_m 于S_m.

离散型随机变量序列.

- 无穷维向 $X = (X_1; X_2; \cdots)$. , $X_m: \to S, \forall m$.
- 5: 仅 I 交代 有限维 分 .
- . 事件 õ 5 → 随 õ 5; õ 同分 , i.i.d..
- . Bernoulli 试验. X ,

$$P(X_1 = H; X_2 = H; X_3 = T) = p^2(1-p); \quad \cdots$$

- . $X_1; X_2; \cdots$ õ 且 Ñ 服从 数为 松分 , :

$$P(X_1 = i_1; \cdots; X_n = i_n) = e \quad \lambda n \prod_{k \quad 1}^{n} \frac{ i_k}{i_k!}; \quad \forall n; \forall i_1; \cdots; i_n.$$

é 无穷维向 $X = (X_1; X_2; \cdots)$ 仅 I 交代有限维 分 .
为什 ？

- 仅 I 5P 在 / (X) 0 þ 限 ,

$$(X) := (\{\{X_m = i\} : m \geqslant 1; i \in S\}):$$

为使 所有X_i 均可 • 代数.

- $\mathscr{E}$ 满 v 交运算封 , 且 $(\mathscr{E}) = (X)$. ,

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n\ 1}^{8} (X_1; \cdots; X_n) = \bigcup_{n\ 1}^{8} (\{\{X_m = i\} : 1 \leqslant m \leqslant n; i \in S\}):$$

- 由 ½ , e $|_{\mathscr{E}} = \hat{}|_{\mathscr{E}}$, 则 $|_{\sigma p \mathscr{E} q} = \hat{}|_{\sigma p \mathscr{E} q}$.
- $|_{\mathscr{E}}$ 即为有限维 分 .

离散时间参数、离散G态空间　随机过程.

- 即，　Ñ．随　　S列$\vec{X} = (X_0; X_1; X_2; \cdots)$.
- 将$\mathbb{Z}\ = \{0; 1; 2; \cdots\}$　解为　Ñ时间. 时间　数记为n.
  初始时刻$n = 0$,
  下一时刻$n = 1$,
  再下一时刻$n = 2, \cdots$

①　②

- $X_n =$ Ä态　　f在时刻n　位　;
  ü　　系统在时刻n　G态.
  . $X_0 = 1; X_1 = 4; X_2 = 4; X_3 = 3; \cdots$

③　④　⑤

- $\vec{X}$ 记录下　f　运Ä　程/　　;
  系统　ü　　程.

- ：以时间n 为g ！ 于位 空间S 数;
  无穷维向 ；无穷长 S i符串.
- 空间:

$$S^{\mathbb{Z}_+} = \{x = (x_0; x_1; x_2; \cdots) : x_n \in S; \forall n \geqslant 0\}:$$

- $X : \to S^{\mathbb{Z}_+}:$

$$x = X(!); \quad (x_0; x_1; x_2; \cdots) = (X_0(!); X_1(!); X_2(!); \cdots)$$

- 将X 改记为$\{X_n : n \geqslant 0\}$, 一x随 .
- 进一 ：往谈论X 是 于$S^{\mathbb{Z}_+}$ 随 . 可 5要求?

推广随机变量 义—随机元.

- 随 $X:\ \to \mathbb{R},\ !\mapsto X(!)$, 满 v 可 5 要求:

$$\{X\leqslant x\}:=\{!:X(!)\leqslant x\}\in\mathscr{F};\quad \forall x:$$

- 5 : $\mathscr{B}=\ (\mathscr{E})$, $\mathscr{E}=\{(-\infty;x]:x\in\mathbb{R}\}$.

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \{X\leqslant x\} & \longleftarrow & (-\infty;x] \end{array}$$

- $X\ {}^{1}D:=\{X\in D\}$, $X\ {}^{1}\mathscr{E}:=\{X\ {}^{1}D:D\in\mathscr{E}\}$.

  题: 下图可交 .

$$\begin{array}{ccc} X\ {}^{1}\mathscr{E} & \longleftarrow & \mathscr{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X\ {}^{1}\mathscr{E}) & \longleftarrow & (\mathscr{E}) \end{array}$$

- 称 $(X):=\ (\{X\leqslant x\}:x\in\mathbb{R})$ 为X 生成 代数. 它是使X 可 • 代数. 可 5 要求 是 $(X)\subseteq\mathscr{F}$.

- 随 试验/概率模 . : (; $\mathscr{F}$; P).
- 设$(\mathbb{X};\mathscr{S})$ 为可 空间. e X : $\to \mathbb{X}$ 满 v 可 5 要求:

$$\{X \in D\} \in \mathscr{F}; \quad \forall D \in \mathscr{S};$$

则称X 为 $\mathbb{X}$ 随 元.

- 5 : 称$\mathbb{X}$ þ 概率 Ý 为分 .
- $X \sim$, X 服从分 , X 分 x 为 :

$$P(X \in D) = (D); \quad \forall D \in \mathscr{S}:$$

. Ñ时间 数! Ñ G态空间 随 程.

- 设(;$\mathscr{F}$;P) 为概率模 . , S 为可数集, $\mathcal{X} = (X_0; X_1; X_2; \cdots)$, , X_m : $\to S$.
- 令

$$\mathbb{X} = S^{\mathbb{Z}_+} = \{x = (x_0; x_1; x_2; \cdots) : x_n \in S; \forall n \geqslant 0\};$$

$$\mathscr{S} = (\{\{x : x_n = i\} : n \in \mathbb{Z} \ ; i \in S\}).$$

- 则, $\mathcal{X}$ 可 解为 $\mathbb{X}$ 随 元, 即随 .
- 5: 仅 I 交代 有限维 分 列.

$$P(X_0 = i_0; X_1 = i_1; \cdots; X_n = i_n); \quad n \geqslant 0; i_0; i_1; \cdots; i_n \in S:$$

连续时间参数、离散G态空间　随机过程.

- 设(　; $\mathscr{F}$; P) 为概率模 . , S 为可数集.
- Y时间　数 $T = \mathbb{R}\quad = [0;\infty)$.
- 一x随机变量: $\mathbf{X} = \{X_t; t \geqslant 0\}$, $\quad X_t : \quad \to S, \forall t \geqslant 0$.
- 使　所有X_t 均可　•　代数:

$$(\mathbf{X}) := \quad (\{\{X_t = i\} : t \geqslant 0; i \in S\}) :$$

- $\mathbf{X}$　于　空间

$$\mathbb{X} = S^T := \{\mathbf{x} = \{x_t; t \geqslant 0\} : x_t \in S; \forall t\}:$$

- $\mathscr{S} = \quad (\{\{\mathbf{x} : x_t = i\} : t \geqslant 0; i \in S\})$, 则$\mathbf{X}$ 可　解为 $\mathbb{X}$　随　元, 即随　.
- E , 仅 I 交代　有限维　分　.

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n \quad 1}^{8} \bigcup_{t_1, \quad ,t_n ¥ 0} \quad (X_{t_1}; \cdots; X_{t_n}):$$

连续时间参数、连续G态空间　随机过程.

- 设(;$\mathscr{F}$;P) 为概率模 . ,　　Y时间　数$T = \mathbb{R}$　$= [0;\infty)$.
- 一x　　于$\mathbb{R}$　随　　　：$\mathbf{X} = \{X_t : t \geqslant 0\}$.
- $(X_{t_1};\cdots;X_{t_n})$ 均为　Y . 随　向　, $\forall n \geqslant 1$, $t_1 < \cdots < t_n$.

  5：允N $X_0 \equiv x_0$.
- 使　所有X_t 均可　　•　　代数:

$$(\mathbf{X}) := \quad (\{\{X_t \leqslant x\} : t \geqslant 0; x \in \mathbb{R}\}):$$

- $\mathbf{X}$　　于　　空间

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^T := \{\mathbf{x} = \{x_t; t \geqslant 0\} : x_t \in \mathbb{R}; \forall t\}:$$

- $\mathscr{S} =$　$(\{\{\mathbf{x} : x_t \leqslant x\} : t \geqslant 0; x \in \mathbb{R}\})$, 则$\mathbf{X}$ 可　解为

  $\mathbb{X}$　随　元, 即随　　　.

- E，仅 I 交代有限维　　分　.

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n \quad 1} \bigcup_{t_1, \quad, t_n ¥0} (X_{t_1}; \cdots ; X_{t_n}):$$

- 　价 / , 交代有限维　　Ý .
- 5：　似 / , 以 þ　Ñ 时间　数　　Y 时间　数均可　　负半　, 均可　区间 ã .

  . $T = \mathbb{Z}$, $\{0; 1; \cdots ; N\}$, $\{N_1; \cdots ; N_2\}$;

  , $T = \mathbb{R}$, $[0; T]$, $[T_1; T_2]$.

立性.

- 事件 Cõ 5 .
- 随 õ 5 : $\forall A_1; \cdots ; A_n$,

$P(X_1 \in A_1; \cdots ; X_n \forall$ Td [( )]TJ/F68 10.9091 Tf 4.848 0 Td [( )-1

þ: Å

设以下随 Ñ 于可数集S, 者 Ñ 于$\mathbb{R}$.

- 设$\mathbf{X} = \{X_\alpha : \in I\}$ 与$\mathbf{Y} = \{Y_\beta : \in J\}$ 是 x 随 .
- e ? 意$(X_{\alpha_1}; \cdots ; X_{\alpha_n})$ 与 ? 意$(Y_{\beta_1}; \cdots ; Y_{\beta_m})$ 相 õ , 则称$\mathbf{X}$ 与$\mathbf{Y}$ 相 õ .
- 原因: 令

$$\mathscr{E}_{\mathbf{X}} := \bigcup_{n \quad 1}^{8} \bigcup_{\alpha_1, \quad ,\alpha_n \mathsf{P} I} (X_{\alpha_1}; \cdots ; X_{\alpha_n});$$

$$\mathscr{E}_{\mathbf{Y}} := \bigcup_{m \quad 1}^{8} \bigcup_{\beta_1, \quad ,\beta_m \mathsf{P} I} (Y_{\beta_1}; \cdots ; Y_{\beta_m}):$$

则它 Ñ 满 v 交运算封 .

- 题: 因此, $\mathscr{E}_{\mathbf{X}}$ 与$\mathscr{E}_{\mathbf{Y}}$ õ 蕴 X $(\mathscr{E}_{\mathbf{X}})$ 与 $(\mathscr{E}_{\mathbf{Y}})$ õ .
- 似 / 可 ½ 义$\mathbf{X}^{\mathrm{p}1\mathrm{q}}; \ldots ; \mathbf{X}^{\mathrm{p}n\mathrm{q}}$ õ , $\mathbf{X}^{\mathrm{p}1\mathrm{q}}; \mathbf{X}^{\mathrm{p}2\mathrm{q}}; \cdots$ õ , õ 同分 .

- 键　事件: $A_n = \{|X_n - X| > ''\}$.
  $X_n \xrightarrow{P} X$ i　$P(A_n) \to 0$;
  $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ i　$P\left(\bigcup_{n¥N} A_n\right) \to 0$.
- Borel-Cantelli引　: e $\sum_n^8 {}_1 P(A_n) < \infty$, 则$P\left(A_n \text{ i:o:}\right) = 0$,

$$\{A_n \text{ i:o:}\} = \bigcap_{N \quad 1}^{8} \bigcup_{n \quad N}^{8} A_n:$$

- 推论: e $\sum_n^8 {}_1 P(|X_n - X| > '') < \infty$, $\forall '' > 0$, 则$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.
- 推论: 设 $_1; \ _2; \cdots$ i.i.d. 且　望存在. 则 $_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
- 强大数½律/SLLN: 设$X_1; X_2; \cdots$ i.i.d.且　望有意义.
  则$(X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.

- 有界收 ½ , BCT:

  设 $X_n \xrightarrow{P} X$. e ∃ M 使 $|X_n| \leqslant M$, ∀ $n \geqslant 1$, 则 $EX_n \to EX$.

- 单 N 收 ½ , MCT, Levi ½ :

  设 X_n 非负且单 N þ 升 X, 则 $EX_n \to EX$.

- Lebesgue 控 收 ½ , DCT:

  设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$. e $|X_n| \leqslant Y$, ∀ n 且 $E|Y| < \infty$, 则 $EX_n \to EX$.

- Fubini ½ (Ñ 时间 数版):

  设 者 X_n Ñ 非负, 者 $\sum_n^8 {}_1 E|X_n| < \infty$,

  则 $E\sum_n^8 {}_1 X_n = \sum_n^8 {}_1 EX_n$.

- Fubini ½ (Y 时间 数版):

  设 者 X_t Ñ 非负, 者 $\int_0^8 E|X_t|\mathrm{d}t < \infty$,

  则 $E\int_0^8 X_t\mathrm{d}t = \int_0^8 EX_t\mathrm{d}t$.

- 条件概率: 设$P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在A 发生 条件下, 事件B (条件)概率.

- 5: 要见 / 在A 发生 条件下 0 , / 已 A 0 , / 假设A 0 , 则 谈及 / 概率 0 Ñ 用P_A 进 1 计算.
- (Ñ .). A 成 时, X 分 列为$\{P_A(X = i); i \in S\}$.
- (Ñ .). / e A (发生), 则X 与Y Õ 0 :

$$P_A(X = i; Y = j) = P_A(X = i)P_A(Y = j); \quad \forall i; j:$$

而 是$P(X = i; Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$, $\forall i; j$.

- 条件分　：条件分　列！条件　Ý.
- 条件　望$E(X|Y)$:
  1. ½ j, 用在$\{Y=j\}$　条件下, X　条件分　列/条件　Ý 求X　望,　$'(j) := E(X|Y=j)$.
  2. 令$E(X|Y) := '(Y)$.
- 5：条件　望$E(X|Y)$ 是随　　.
- 　望公式: $EX = EE(X|Y)$.