第三章、随机变þ的数字特

- ©布的完　刻画:

  l散．的©布列(PMF)、

  ëY．的密度　数(PDF)、

  一般a．的©布　数(CDF).
- 实际问题　, 难以完　刻画/描述/确定©布.
- 数字特　容易计算, 是ïÄ工ä. 如,
  - 　%位　特　(期望);
  - ©散程度特　(•差).

§3.1 l散.随机变þ的数Æ期望

~. 设某　彩票u 1 了10万张, 每张售1元, 其　10张有奖, 各奖y 5000元, 其它无奖. 问: 买一张彩票, 平þ盈|多少º

- 将"盈|"视为随机变þ, 记为X. 则X 可取　5000　1 或　1. 对应的概率为$\frac{10}{100000}$　1　$\frac{10}{100000}$, (空间百©比).
- 平þ盈|为

$$EX \quad 4999 \quad \frac{10}{100000} \quad 1 \quad \text{p}1 \quad \frac{10}{100000}\text{q} \quad 0{:}5(\text{元}){:}$$

- 注: "计算4999 与　1 的算术平þ, 得2499 元"是荒谬的.
- 注: 期望是可能　的加权平þ.

~. ~射5 â 子求平 þ â 子数.

数 â 如右表所示:

- $\hat{p}_k$ 取k 的频率/(时间)百 © 比.
- 泊松 © 布列:

  p_k, k 0; 1; 2;

- 平 þ â 子数:

$$\frac{1}{2608}\text{þ}0 \quad 57 \quad 1 \quad 203$$

$$2 \quad 383 \qquad 10 \quad 16\text{q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\hat{p}_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kp_k:$$

- 注: 期望 数 â 的算术平 þ .

X	频数	频率	p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.202
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
¥ 10	16	0.006	0.007
总计	2608	1.000	1.000

- ©布特 最 要的特 一: %位 特 (期望).
- ~. 一批数 â $a_1; a_2; \dots; a_n$ 的平 þ :

$$\bar{a} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i:$$

统计频数/频率: 可能 x_k出现n_k g, 频率为$\frac{n_k}{n}$. 于是

$$\bar{a} \quad \frac{1}{n}\sum_{k} x_k n_k \quad \sum_{k} x_k \frac{n_k}{n} \quad \sum_{k} x_k p_k:$$

- 定义1.1. 设X 为 l 散 . 随机变 þ , 概率 © 布如下:

$$P\mathrm{p}X \quad x_k\mathrm{q} \quad p_k; \quad k \quad 1;2;\dots:$$

称 $\sum_k x_k p_k$ 为X 的(数学) 望或 þ 值, 记为EX 或$E\mathrm{p}X\mathrm{q}$.
- 注: 也称为该©布的期望/ þ .
- 注: 假设级数 ý 对收 ñ . Ä 则期望不 • 在.

点分布Bp1; pq 的 望

- X 的©布:

X	1	0
概率	p	1 p

.

- X 的期望:

$$E X \quad 1 \quad p \quad 0 \quad \mathrm{p1} \quad pq \quad p:$$

二项分布$B(n,p)$的 望

- X 的©布: 记$q=1-p$, 则

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\dots,n.$$

- X 的期望:

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (k'=k-1) \\
&= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{n'!}{k'!(n'-k')!} p^{k'} q^{n'-k'} = np, \qquad (n'=n-1).
\end{aligned}
$$

泊松分布Poissonp q 的 望

- X 的©布:

$$P\mathrm{p}X \quad k\mathrm{q} \quad \frac{k}{k!}e^{-\lambda}; \quad k \quad 0;1;2;\dots$$

- X 的期望:

$$EX \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \quad \frac{k}{k!}e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q}!}e^{-\lambda} \quad \mathrm{p}k' \quad k \quad 1\mathrm{q}$$

$$\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{k'}{k'!}e^{-\lambda} \quad :$$

- 注: k p_k p_{k-1}, k $1;2;$

超几何分布(参数为$N;M;n$)的 望

- X 的©布:

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};\quad m=0;1;2;\dots;n.$$

- X 的期望：记$x'=x-1$. 则

$$EX=\sum_{m=0}^{n} m\frac{M!}{m!(M-m)!}\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{M!}{m'!(M-m)!}\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=\sum_{m=1}^{n}\frac{M\,(M')!}{m'!(M'-m')!}\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$=M\sum_{m'=0}^{n'}C_{M'}^{m'}\frac{C_{N'-M'}^{n'-m'}}{C_N^n}=M\frac{C_{N'}^{n'}}{C_N^n}\sum_{m'=0}^{n'}C_{M'}^{m'}\frac{C_{N'-M'}^{n'-m'}}{C_{N'}^{n'}}$$

$$=M\frac{N'!}{n'!(N'-n')!}\frac{n!(N-n)!}{N!}=\frac{Mn}{N}=n\frac{M}{N}.$$

- 定

指数分布$E(\lambda)$的期望

- X 的密度:

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0;\\ 0; & \text{其它}.\end{cases}$$

- X 的期望:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} t e^{-t} dt \quad (\text{令} t = \lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-t e^{-t}\right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

正态分布Np ; ^{2}q 的 望

- X 的密度:

$$ppxq \quad ?\frac{1}{2} \exp \text{"} \frac{px \qquad q^2}{2 \quad ^2} * \; :$$

- X 的期望:

$$EX \quad » ^{\infty}_{-\infty} xppxqdx$$

$$» ^{\infty}_{-\infty} x \; ?\frac{1}{2} \exp \text{"} \frac{px \qquad q^2}{2 \quad ^2} * \; dx$$

$$» ^{\infty}_{-\infty} p \qquad yq \; ?\frac{1}{2} \exp \text{"} \frac{y^2}{2} * \; dy \qquad py \quad \frac{x}{\qquad} q$$

$$» ^{\infty}_{-\infty} pyqdy \qquad » ^{\infty}_{-\infty} y \; pyqdy \qquad :$$

- 注: 是权 的对称 %.

伽玛分布$\Gamma(\alpha,\beta)$的期望

- X 的密度:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad (\alpha>0,\ \beta>0)$$

- X 的期望:

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-\beta x}dx\\&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha'-1}e^{-\beta x}dx\qquad(\alpha'=\alpha+1)\\&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha')}{\beta^{\alpha'}}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\beta}.\end{aligned}$$

§3.3 期望的简 ü 5 及随机变 þ 数的期望公式

- 设 X 为随机变 þ , $c; k; b$ 为常数. 则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p1q}\ E\mathrm{pcq} \quad c;\\
&\mathrm{p2q}\ E\mathrm{p}kX\mathrm{q} \quad kE\mathrm{p}X\mathrm{q};\\
&\mathrm{p3q}\ E\mathrm{p}X \quad b\mathrm{q} \quad E\mathrm{p}X\mathrm{q} \quad b;\\
&\mathrm{p4q}\ \text{线 5 :}\ E\mathrm{p}kX \quad b\mathrm{q} \quad kE\mathrm{p}X\mathrm{q} \quad b:
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

- : (1) $P\mathrm{p}X \quad c\mathrm{q}$ 1. 按定义 (1) 成 á .
  由(2), (3) (4) 成 á .

(2) $EpkXq \quad kEpXq$ 的 明:

- 若k 0, 则ü边þ为0, ✓. 下设k 0.
- l散 .: 设X 的©布为$PpX \quad x_iq \quad p_i$, $i \quad 1;2;:::.$
  则$Y \quad kX$ 的©布为$PpY \quad kx_iq \quad p_i$, $i \quad 1;2;:::$
  按定义, $EpYq \quad {}_i\, kx_i \quad p_i \quad k \quad {}_i\, x_ip_i \quad kEpXq.$
- ë Y .: 设X 的密度为$ppxq$,
  则$Y \quad kX$ 的密度为$p_Ypyq \quad \frac{1}{|k|}p \quad \frac{y}{k}$. (参见第 章, ~4.8).
  按定义

$$EpYq \quad \int_{-\infty}^{\infty} y \quad p_Ypyqdy \quad \frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{\infty} y \quad p \quad \frac{y}{k} \quad dy$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty} x \quad ppxqdx \quad kEpXq: \quad px \quad \frac{y}{k}q:$$

(3) $EpX \quad bq \quad EpXq \quad b$ 的 明:

- l散5与(2) a似. 下设X 为ë Y . , 密度为$ppxq$.
- $p_Y pyq \quad ppy \quad bq$. (参见第 章, ~4.8)

按定义,

$$EpYq \quad »_{-\infty}^{\infty} y \quad p_Y pyq dy \qquad »_{-\infty}^{\infty} y \quad ppy \quad bqdy$$

$$»_{-\infty}^{\infty} px \quad bqppxqdx \quad px \quad y \quad bq$$

$$»_{-\infty}^{\infty} xppxqdx \quad b \quad »_{-\infty}^{\infty} ppxqdx \quad EpXq \quad b:$$

- ł散.: 设X 的©布列为PpX x_iq p_i, i $1;2;:::$.
  若下式右边ý对收ñ, 则

$$E f \mathrm{p} X \mathrm{q} \quad \overset{\text{¸}}{\underset{i}{}} \quad f \mathrm{p} x_i \mathrm{q} p_i : \tag{3.3}$$

- ë Y .: 设X 的密度为ppxq. 若下式右边ý对收ñ, 则

$$E f \mathrm{p} X \mathrm{q} \quad »_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{p} x \mathrm{q} p \mathrm{p} x \mathrm{q} dx : \tag{3.2}$$

- 注: 免去了求Y fpXq 的©布列或密度的 程.
- 注: Î 约定. ~EX^k 表示EpX^kq, 不表示pEXq^k.

~3.2 X Ur0; 2 s, 求$E\sin X$.

-) :

$$E\sin X \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\, p_X(x)\,dx$$
$$\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\, \frac{1}{2}\,dx \quad 0.$$

- 注: 上, 由对称 5 $E\sin X$ 0.

- © 布特　　最　要的特　　　：© 散程度/宽窄特　(• 差).
- ~. 甲、乙 ü 个女生　　唱队的身高如下, 平 þ 都是1.60.

  甲队: 1.60, 1.62, 1.59, 1.60, 1.59;　齐/ • 差　.

  乙队: 1.80, 1.60, 1.50, 1.50, 1.60. 参差不齐/ • 差 Œ .
- ~. 一批数 â $a_1; a_2; \cdots; a_n$ 的波动程度.

  如, 产品的某　特 5 (如强度)波动 Œ , 说明生产不稳定.

  如, 生物的某　特 5 (如 É ø)波动 Œ , 表示病态.
- 一批数 â 的 © 散程度/波动程度:

$$\frac{1}{n\quad 1}\;\mathrm{p}a_1\quad \bar{a}\mathrm{q}^2\quad \mathrm{p}a_2\quad \bar{a}\mathrm{q}^2\qquad\qquad \mathrm{p}a_n\quad \bar{a}\mathrm{q}^2\;: \tag{4.1}$$

- 数 â 5 自随机变 þ X, 则 $\bar{a}$　EX $^{\triangle}$　.

  上式约为 Y　pX　　q^2 对应的数 â 的平 þ　,　　EY .

- 定义: 设EX • 在, 称

$$E \quad X \quad EX \quad ^2 \qquad (4.3)$$

为X 的方差, 记为$DpXq$ 或VarpXq. 也称为其©布的•差.

- 定义4.1(l 散 .) & 4.2(ë Y .)

设X 的©布列如下, 或密度为$ppxq$.

$$PpX \quad x_kq \quad p_k; \ k \quad 1;2;:::$$

则$DpXq$ 有如下表ˆ式:

$$\text{¸}_k \ x_k \quad EX \ ^2 p_k; \qquad \text{»}_{-\infty}^{\infty} \ x \quad EX \ ^2 ppxqdx \qquad (4.2, 4.2')$$

- 注: 若级数/积©收ñ, 则•差•在; Ä则•差u散.
- •差是š负的: $DpXq$ ¥ 0.

- • 差的 等式/计算公式:

$$D(X) \quad EX^2 \quad EX \;^2. \tag{4.4}$$

- I 要用第四章的定 n: $E(X \quad Y) \quad E(X) \quad E(Y).$
- (4.4) 的 明: 记 $\quad EX.$

$$D(X) \quad E \quad X \quad E(X \quad)^2 \quad X \quad ^2 \quad E(X^2 \quad 2 \quad X \quad ^2)$$

$$EX^2 \quad 2 \quad EX \quad ^2 \quad EX^2 \quad ^2.$$

- 另 : 如, $X \quad p(x)$, 记 $\quad EX.$ 则
  »p

  $D(X)$

点分布 $B(1,p)$ 的方差

- X 的期望: $EX = p$.
- X 的方差: 按定义,

$$D(X) = E(X-p)^2 = (1-p)^2 p + p^2 (1-p) = p(1-p).$$

- X 的方差: 按计算公式,

$$EX^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$$

$$\Rightarrow D(X) = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

二项分布Bpn; pq 的方差

- X 的期望：$EX \quad np.$
- X 的•差：按定义，
- X 的•差：记$q \quad 1 \quad p$，按计算公式，

$$EX^2 \quad \overset{n}{\underset{k=0}{¸}} \quad k^2 \quad \frac{n!}{k!\mathrm{p}n \quad k\mathrm{q}!} p^k q^{n-k}$$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{¸}} \quad k\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q} \quad k \quad \frac{n!}{k!\mathrm{p}n \quad k\mathrm{q}!} p^k q^{n-k}$$

$$n\mathrm{p}n \quad 1\mathrm{q}p^2 \quad \overset{n'}{\underset{k'=0}{¸}} \quad \frac{n'!}{k'!\mathrm{p}n' \quad k'\mathrm{q}!} p^{k'} q^{n'-k'} \quad EX \quad \mathrm{p}x' \quad x \quad 2\mathrm{q}$$

$$n\mathrm{p}n \quad 1\mathrm{q}p^2 \quad np \quad n^2p^2 \quad np^2 \quad np$$

$$\tilde{n} \quad D\mathrm{p}X\mathrm{q} \quad EX^2 \quad \mathrm{p}EX\mathrm{q}^2 \quad np\mathrm{p}1 \quad p\mathrm{q}:$$

泊松分布Poissonp q 的方差

- X 的期望: EX .
- X 的 • 差: $k' \quad k \quad 1$, $k'' \quad k \quad 2$, 按计算公式,

$$EX^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \quad \frac{k}{k!}e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \quad \frac{k}{pk \quad 1q!}e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} pk \quad 1q \quad 1 \quad \frac{k}{pk \quad 1q!}e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{pk \quad 2q!}e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{pk \quad 1q!}e^{-\lambda}$$

$$2 \quad \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{k''}{k''!}e^{-\lambda} \quad \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{k'}{k'!}e^{-\lambda} \quad 2$$

ñ $DpXq \quad EX^2 \quad pEXq^2$:

þ 匀分布$U[a;b]$的方差

- X 的期望：$EX \quad \frac{a+b}{2}$.
- X 的•差：按计算公式，

$$EX^2 \quad \int_a^b x^2 \quad \frac{1}{b \quad a} dx \quad \frac{1}{b \quad a} \quad \frac{x^3}{3}\Big|_a^b \quad \frac{1}{3}(a^2 \quad ab \quad b^2)$$

$$\Rightarrow \quad D(X) \quad EX^2 \quad (EX)^2$$

$$\frac{1}{3}(a^2 \quad ab \quad b^2) \quad \frac{1}{4}(a^2 \quad 2ab \quad b^2) \quad \frac{1}{12}(b \quad a)^2.$$

- X 的•差：按定义，

$$D(X) \quad E(X \quad EX)^2 \quad \int_a^b (x \quad \frac{a \quad b}{2})^2 \frac{1}{b \quad a} dx$$

$$\frac{1}{b \quad a} \quad \frac{(x \quad \frac{a+b}{2})^3}{3}\Big|_a^b \quad \frac{1}{3(b \quad a)} \quad 2(\frac{b \quad a}{2})^3 \quad \frac{1}{12}(b \quad a)^2.$$

指数分布Exp( ) 的方差

- X 的期望: $EX \quad \frac{1}{\lambda}$.
- X 的 • 差: 按计算公式,

$$EX^2 \quad \int_0^{\infty} x^2 \quad e^{-\lambda x}dx \quad \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^2e^{-t}dt \quad (t \quad x)$$

$$\frac{1}{2}\Gamma(3) \quad \frac{1}{2} \quad 2! \quad \frac{2}{2}$$

ñ $D(X) \quad EX^2 \quad (EX)^2 \quad \frac{1}{2}.$

正态分布Np ; ^{2}q 的方差

- X 的期望: EX .
- X 的•差: 按定义,

$$DpXq \quad EpX \qquad q^2$$

$$\gg_{-\infty}^{\infty} px \qquad q^2 \quad ?\frac{1}{\overline{2}} \exp \quad " \quad \frac{1}{2} \frac{px \qquad q^2}{2} \quad * \quad dx$$

$$2 \gg_{-\infty}^{\infty} t^2 \quad ?\frac{1}{\overline{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad p令t \quad \frac{X}{\qquad} q$$

$$^2 : \quad (见 \sim 3.1)$$

- 注: ü 个参数 ; ^{2} ©别是期望 •差.

伽玛分布Γp ; q 的方差

- X 的密度: 定 ,

$$p_{\alpha}pxq \qquad \frac{\alpha}{\Gamma p\ \ q}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}; \qquad px\ \text{¡}\ 0q:$$

- X 的期望: $EX \qquad \frac{\alpha}{\beta}$.
- X 的 • 差: ′ 2, 按计算公式,

$$EX^2 \qquad \text{»}_0^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{\Gamma p\ \ q}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

$$\frac{\alpha}{\Gamma p\ \ q}\ \frac{\Gamma p\ \ {}'q}{\alpha'}\ \text{»}_0^{\infty} \frac{\alpha'}{\Gamma p\ \ {}'q}x^{\alpha'-1}e^{-\beta x}dx$$

$$\frac{\Gamma p\ \ \ 2q}{{}^2\Gamma p\ \ q}\qquad \frac{p\ \ \ 1q}{2}$$

$$\text{ñ}\ \ DpXq \qquad \frac{p\ \ \ 1q}{2} \qquad \frac{2}{2} \qquad \frac{}{2}:$$

- 设X 为随机变þ, $c; k; b$ 为常数. 则

$$\begin{aligned} &\mathrm{p1q} \quad D\mathrm{pcq} \quad 0; \\ &\mathrm{p2q} \quad D\mathrm{p}kX\mathrm{q} \quad k^2 D\mathrm{p}X\mathrm{q}; \\ &\mathrm{p3q} \quad D\mathrm{p}X \quad b\mathrm{q} \quad D\mathrm{p}X\mathrm{q}; \\ &\mathrm{p4q} \quad D\mathrm{p}kX \quad b\mathrm{q} \quad k^2 D\mathrm{p}X\mathrm{q}: \end{aligned} \tag{4.5}$$

- : (1) $E\mathrm{pcq}$ c. 按定义, $D\mathrm{p}X\mathrm{q}$ $E\mathrm{pc}$ $c\mathrm{q}^2$ 0.
  由(2), (3) (4) 成á.

(2) $DpkXq \quad k^2DpXq$ 的 明:

- 按计算公式,

$$EpkXq \quad kEpXq; \quad ErpkXq^2s \quad Epk^2X^2q \quad k^2EX^2$$

$$ñ \; DpkXq \quad k^2EX^2 \quad pkEXq^2$$

$$k^2 \; EX^2 \quad pEXq^2q \quad k^2DpXq:$$

(3) $DpX \quad bq \quad DpXq$ 的 明:

- 按定义,

$$EpX \quad bq \quad EpXq \quad b$$

$$ñ \; DpX \quad bq \quad E \; pX \quad bq \quad EpX \quad bq \quad {}^2$$

$$EpX \quad EXq^2 \quad DpXq:$$

§3.5 其它

定n 5.1 设 EX 与 2 DpXq •在. 则对任意" ¡ 0,

$$P p|X \quad | ¥ "q ¤ \frac{2}{"2}: \qquad (5.1)$$

- ë Y . 情 / 的 明:

$$DpXq \gg_{-\infty}^{\infty} x \quad q^2 ppxqdx ¥ \gg_{x\leqslant\mu-\varepsilon 或 x\geqslant\mu+\varepsilon} x \quad q^2 ppxqdx$$

$$¥ \gg_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} "^2 ppxqdx \gg_{\mu+\varepsilon}^{\infty} "^2 ppxqdx$$

$$¥ "^2 \gg_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} ppxqdx \gg_{\mu+\varepsilon}^{\infty} ppxqdx$$

$$"^2 P p X ¤ \quad "或 X ¥ \quad "q \quad "^2 P p|X \quad | ¥ "q:$$

- 注: ‡映了 X ©布的权 的©散程度.

定n 5.1 设 EX 与 ² $DpXq$ •在. 则对任意" ¡ 0,

P p|X | ¥ "q ¤ ²/"² : (5.1)

- 称 a $\overline{DpXq}$ 为X 的标准差.
- 取" k , 则

Pp|X | ¥ k q ¤ $\frac{1}{k^2}$:

- 特别地, 取k 3, 则推出

Pp|X | ¥ 3 q ¤ $\frac{1}{9}$:

- 注: 态©布的 ² 验 则Pp|X | ¥ 3 q ¤ 0:0027. (§2.3)

- ©别称EX^k, $EpX \quad EXq^k$ 为X 的k 原点Ý, 中心Ý,
  ©别记为 $_k$, $_k$, $(k \quad 1;2;:::)$.
- 注: þ 为 $_1$, • 差为 $_2$.
- 注: k 也可以不是 数.

- 设X 的©布 数Fpq : x ÞÑ p Fpxq ë Y且î格ü调上升. 则•在‡ 数p ÞÑ x x_p, p P p0; 1q, 即•在唯一的x_p 使得

$$F\text{p}x_p\text{q} \quad p; \quad @p \text{ P p0; 1q:}$$

- 称x_p 为X 的p **分位数**. 称p ÞÑ x_p 为X 的**分位数函数**.
- 一般情/. 若下式成á, 则称x_p 是X 的p **分位数**(下©位点).

$$P\text{p}X \quad x_p\text{q} \text{ ¤ } p \text{ ¤ } P\text{p}X \text{ ¤ } x_p\text{q:} \tag{5.4}$$

等价地; PpX ¤ x_pq ¥ p; PpX ¥ x_pq ¥ 1 p: (5.4')

- 令p $\frac{1}{2}$. 称$x_{\frac{1}{2}}$ 为**中位数**.
- 注: ©位数•在(如, x_p inf$\text{t}x$: FpXq ¥ pu), 但不一定唯一.

~. ü 点©布Bp1; p_0q 的©位数.

- 记q_0 1 p_0. ©布 数:

$$F\text{pxq} \quad \begin{cases} 0; & x \quad 0; \\ q_0; & 0 \text{ ¤ } x \quad 1; \\ 1; & x \text{ ¥ } 1: \end{cases}$$

- ©位数:

$$x_p : \begin{cases} 0; & p \text{ P p}0; q_0\text{q}; \\ \text{r}0; 1\text{s}; & p \quad q_0; \\ 1; & p \text{ P p}q_0; 1\text{q}: \end{cases}$$