

## 第八章、假设检验

### §8.1 问题的提法

- 例1.1. 200 件产品,  $b$  件次品. 问: 次品  $p(= \frac{b}{200}) \leq 3\%$ ?  
方法: 抽查10 件, 观察数据(例如: 发现2 件次品).

- 例1.2. 纸币长度  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 问:  $\mu = 155\text{mm}$ ?  
方法: 测量10 张纸币的长度, 得到数据  $(x_1, \dots, x_{10})$ .

- 检验与估计相同之处.

模型:  $X \sim F_{\theta}, \theta \in \Theta$ . 目标: 对  $\theta$  做出一些结论.

方法: 抽样, 产生数据  $X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } F_{\theta}$ .

- 检验与估计不同之处.

估计: 输出值  $\hat{p}, \hat{\mu}$ , 或者区间.

检验: 回答 **问题**, 输出 “是” 或 “否” .

- 定义1.1. 假设/原假设  $H_0 : \theta \in \Theta_0$ .

对立假设/备择假设  $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ .

检验问题  $(\Theta_0, \Theta_1)$ .  $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$ .

- 问题的提法:  $H_0$  是否成立? \_\_\_\_\_

- 检验方法: 给出一个否定域  $\mathcal{W} (\subseteq \mathbb{R}^n)$ .

若数据  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}$ , 则输出“拒绝(否定)  $H_0$ ”;  
若  $\vec{x} \notin \mathcal{W}$ , 则输出“不拒绝(接受)  $H_0$ ”.

检验方法= 带概 的反证法.

- 寻找 $\mathcal{W}$  使得

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$ : 假设 $H_0$  成立, 那么小概 事件 $\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$  发生了, 矛盾! 因此, 原假设 $H_0$  不成立. 即, 否定 $H_0$ .

—注: 在指定水平下有充分证据表明 $H_0$  不成立, 推出 $H_1$  成立.  
强烈的否定!

- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$ : 没有足够充分的证据表明 $H_0$  不成立.

但同样不代表已经有充分的证据接受 $H_0$ , 微弱的接受.

- 两类错误:

第一类:  $H_0$  为真, 否定 $H_0$ . 犯错概  $P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \theta \in \Theta_0$ .

第二类:  $H_0$  为假, 接受 $H_0$ . 犯错概  $P_{\theta}(\vec{X} \notin \mathcal{W}), \theta \in \Theta_1$ .

例1.6. 药品检验. 药效  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知.

若  $\mu \geq \mu_0$ , 则药有效; 若  $\mu \leq \mu_0$ , 则药无效.

- 怎样提  $H_0$ ?

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

- 控制第一类错误, 即  $H_0$  为真却输出 “**■**定  $H_1$ ” 的概

$$\sup_{\theta \in \theta_0} P_{\theta}(X \in \mathcal{W}) \leq \alpha.$$

- 防止假药上市, 即  $\mu \leq \mu_0$  为真却输出 “**■**定  $\mu \geq \mu_0$ ” .
- 因此, 应该选  $H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$ .

- 定义1.2. 称  $\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W})$  为  $\mathcal{W}$  的功效函数. 若

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称  $\mathcal{W}$  为检验问题  $(\Theta_0, \Theta_1)$  的一个(显著性)水平为  $\alpha$  的否定域.

- 注: 选取  $\mathcal{W}$ , 使得  $\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$  在  $\Theta_0$  小, 在  $\Theta_1$  越大越好.

- 定义1.3. 若  $\mathcal{W}$  是检验问题  $(\Theta_0, \Theta_1)$  的水平为  $\alpha$  的否定域, 并且对任意水平为  $\alpha$  的否定域  $\tilde{\mathcal{W}}$  都有:

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geq P_{\theta}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称  $\mathcal{W}$  为检验问题  $(\Theta_0, \Theta_1)$  的水平为  $\alpha$  的一致最大功效否定域/UMP否定域.

- 定义1.4. 若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha \leq P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 $(\Theta_0, \Theta_1)$ 的一个水平为 $\alpha$ 的无偏否定域.

- 定义1.5: 若 $\mathcal{W}$ 是检验问题 $(\Theta_0, \Theta_1)$ 的水平为 $\alpha$ 的无偏否定域, 并且对任意水平为 $\alpha$ 的无偏否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geq P_{\theta}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 $\mathcal{W}$ 为检验问题 $(\Theta_0, \Theta_1)$ 的水平为 $\alpha$ 的一致最大功效无偏否定域/**最优无偏否定域**/UMPU 否定域.