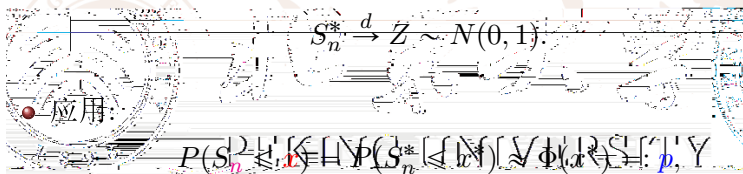


§4.3 中心极限定理

- 定理3.1(Linderberg-Levy CLT). 假设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $0 < \text{var}(X_1) < \infty$. 那么,


$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$
$$P(S_n^* \leq x) \approx \Phi(x^*) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

其中, $x^* = \frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$.

例3.1. 加法器同时收到20个噪声电压 $V_k, k = 1, \dots, 20$, 它们独立同分布, $V_1 \sim U(0, 10)$. 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P(V > 105)$.

• 此题已知 $n = 20, x = 105$, 求 p .

• $EV_1 = 5, \text{var}(V_1) = \frac{10^2}{12}$.

• 根据CLT,

$$P(V > 105) = P(\bar{V} > \bar{x}) \approx 1 - \Phi(x^*) =: p,$$

其中

$$x^* = \frac{105 - 20 * 5}{20 * \frac{100}{12}}$$

• 计算得 $x^* \approx 0.387$. 查表得 $\Phi(x^*) = 0.652$,

从而所求之 $p = 1 - 0.652 = 0.348$.

例3.2. 旅馆有500间客房, 每间有一台2千瓦的空调. 入住为80%. 问: 需 千瓦的电力能有99% 的把握保证电力足够?

- 已知 n, p , 求 x . 假设提供 x 千瓦.
- $A_i =$ 第 i 间房开空调, $P(A_i) = 80\%$, $X_i = 2 \times 1_{A_i}$. $n = 500$.
- $EX_1 = 2.8 = 1.6$, $\text{var}(X_1) = 4 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$.

• 要求 x 满足: $P(S_n \leq x) \geq 99\% = p$. 根据CLT, 要求

$$P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) \geq 0.99,$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 * 2 * 0.8}{\sqrt{500 * 2^2 * 0.8 * 0.2}}$$

- 查表得 $\Phi(2.33) = 0.99$. 即, 要求 $x^* \geq 2.33$.

即, 要求 $x \geq 800 + 2.33 * \sqrt{320} = 841.68$, 从而需842 千瓦.

例3.3. 桥的强度 $Y \sim N(300, 40)$ (单位: 吨), 车的平均重量为5, 方差为2. 问: 为保证桥不出问题的概 不小于0.99997, 最 允许在桥上同时出现 辆车?

- 已知 x , $p = 0.99997$, 求 n .

- 假设有 n 辆车在桥上, 第 i 辆的重量为 X_i .

模型假设 X_1, \dots, X_n 独立同分布, 且与 Y 相互独立.

- 记 $S_n = X_1 + \dots + X_n$, 保证 $P(S_n \leq Y) \geq 0.99997$.

- 根据CLT 及独立性, 近似地,

$S_n - Y \sim N(5n - 300, 2n + 40)$. 因此, 令 $0^* = \frac{0 - (5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}}$, 有

$$P(S_n \leq Y) = P(S_n - Y \leq 0) \approx \Phi(0^*).$$

- 要求 $\Phi(0^*) \geq 0.99997$, 查表得 $x^* \geq 4$, 即, $\frac{-(5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}} \geq 4$, 解得 $n \leq 50.5$. 从而, 最 同时50 辆车.