定理 (Chebyshev s WLLN, 定理 .)

假设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立，且 $\operatorname{var}(X_i) \leqslant M$, $\forall i$. 那么，

$$\frac{}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} \quad .$$

- 令 $A_n = \{|\frac{1}{n}(S_n - ES_n)| \geqslant \varepsilon\}$. 需验证 $P(A_n) \to$.
- 由切比雪夫不等式，

$$P(A_n) = P(|S_n - ES_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{}{(n\varepsilon)^2} \operatorname{var}(S_n)$$

$$\leqslant \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{\varepsilon^2} \cdot \frac{}{n} \to \quad .$$

- “相互独立” 可减弱为 “两两不相关”.

- 推论 . . 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $\mathrm{var}(X_1) < \infty$, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

- 推论 . . 单次试验中A 发生的概 为p, 则

$$n \text{ 次试验中} A \text{ 发生的频 } \xrightarrow{P} \mu.$$

- 例 . . 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 密度为$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$. 不加证明地接受 $\frac{S_n}{n}$ 与X_1 有相同的密度. 于是,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \text{ 不趋于 .}$$

SITY PEKING UNIVERS

- 展开，

$$ES_m^4 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} EX_iX_jX_kX_\ell.$$

- 同类项，r, s, t, u 互不相等，

$$EX_r^4, EX_r^3X_s, EX_r^2X_s^2, EX_r^2X_sX_t, EX_rX_sX_tX_u.$$

- $EX_s = \quad \Rightarrow EX_r^3X_s = EX_r^2X_sX_t = EX_rX_sX_tX_u = \quad .$
- $EX_r^4 \leqslant M$，且

$$EX_r^2X_s^2 = \left(EX_r^2\right)\left(EX_s^2\right) \leqslant \sqrt{EX_r^4}\sqrt{EX_s^4} \leqslant M.$$

- 于是，

$$ES_m^4 \leqslant mM + C_m^2C_4^2M \leqslant 3m^2M.$$

$$\Rightarrow P(A_m) \leqslant \frac{3M}{\varepsilon^4} \times \frac{\quad}{m^2} \Rightarrow P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} P(A_m)\right) \to \quad .$$

- 推论 . . 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, EX_1^4 存在, 则$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 推论 . . 单次小试验中事件A 发生的概 为p. 在独立重复试验中, 前n次试验中A 发生的频 $\xrightarrow{\text{a.s.}} p$.
- 定理 . . (Kolmogorov s SLLN). 假设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 期望存在, 则$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 时间平均 空间平均, (期望的含义).

应用( ) 统计方法的理论依据.

- 数据 $X_1, \cdots, X_n$ 为X 的n 次独立观测值, 它们独立同分布.
- 估计期望

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

- 估计方差

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} EX^2 - (EX)^2 = \mathrm{var}(X).$$

应用( )估计积分$I = \int_a^b f(x)dx$.

- $I = \int_0^1 f\big(a+(b-a)u\big)(b-a)du$, 因此不妨假设$a =$, $b =$.
- $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = Ef(U)$.
- SLLN

$$I \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(U_1) + \cdots + f(U_n)\right).$$