

## 第四章概 极限定理

### §4.1 随机序列的收敛性

- 定义1.1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称 $\xi_n$ 依概 收敛于 $\eta$ , 记为 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ .

- 定义1.2. 若

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \eta\right) = 1$$

则称 $\xi_n$ 几乎必然收敛于 $\eta$ , 记为 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$ .

- 定义1.3. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\eta}(x), \quad \forall x \in C(F_{\eta}),$$

则称 $\xi_n$ 依分布收敛于 $\eta$ , 记为 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ .

• 定理1.1. 若  $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$ , 则  $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ .

• 令  $A_n = \{|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon\}$ , 则(不加证明地接受)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

• 例1.1 表明  $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$  不能推出  $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$

• 定理1.2. 若  $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ , 则  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ .

• 例1.2 表明  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$  不能推出  $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ .

- 假设  $X_1, X_2, \dots$  是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

- 定义1.4. 若  $EX_n, n = 1, 2, \dots$  都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0,$$

则称  $X_1, X_2, \dots$  服从(弱)大数 (Weak Law of Large Numbers, WLLN).

- 定义1.5. 若  $EX_n, n = 1, 2, \dots$  都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称  $X_1, X_2, \dots$  服从强大数 (SLLN).

- 定义1.6. 若 $EX_n, \text{var}(X_n), n = 1, 2, \dots$  都存在,  $\text{var}(X_n)$  不全为0, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

则称 $X_1, X_2, \dots$  服从中心极限定理(Central Limit Theorem, CLT).

- 定义1.7 若对任意 $n \geq 2$  都有 $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 则称 $X_1, X_2, \dots$  相互独立.

- 若 $X_1, X_2, \dots$  相互独立, 且 $X_n \stackrel{d}{=} X_1, \forall n \geq 2$ , 则称 $X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 记为i.i.d. (independent and identically distributed).