§3.3 随机变量的独立性

- 定义3.1. 若对任意满足$a < b$ 且$c < d$ 的实数a, b, c, d, 都有

$$P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b)P(c < Y < d),$$

则称X 与Y 相互独立.

- 事实上, 对大量的$A, B \subset R$ 有

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

- 定理3.3. X, Y 相互独立当且仅当

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

- 定理3.1. 离散型, X, Y 相互独立当且仅当

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

- 定理3.2. 连续型, X, Y 相互独立当且仅当

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

- X 与 Y 相互独立的充分条件:

  离散型:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_i q_j, \quad P(Y = y_j | X = x_i) = q_j, \quad \forall i, j;$$

  连续型:

$$p_{X,Y}(x, y) = f(x)g(y), \quad p_{X|Y}(x|y) = f(x), \quad \forall x, y. \text{ (推论3.1)}$$

例3.1. (X,Y) 服从二维正态分布, $p_{X,Y}(x,y)$ 如下

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-{\color{red}2\rho uv}}{2(1-\rho^2)}\right\},$$

其中,

$$u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\quad v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

- 已有结论:

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\},\quad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}.$$

- X,Y 相互独立当且仅当$\rho=0$.