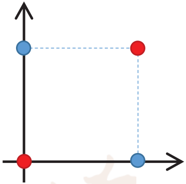
# 1. 离散型情形

§3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布, §3.7 条件分布

- 定义2.1 & 2.2. 若 = ( , ) 取有限个或可列个“值” (二维向量), 则称 为离散型.
- 是离散型当且仅当 , 都是离散型.
- 

- 定义2.3. 设 $= ( \quad , \quad )$, 则 的分布称为 关于 的边缘分布. 关于 的边缘分布类似.



- 例2.5. $0 \leqslant \quad \leqslant \frac{1}{4}$,

$( \quad = (0 \; 0)) = \; ( \quad = (1 \; 1)) = \frac{1}{4} + \quad ;$

$( \quad = (0 \; 1)) = \; ( \quad = (1 \; 0)) = \frac{1}{4} - \quad .$

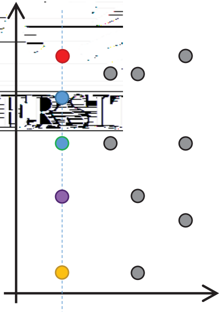
总有, , $\sim (1 \; \frac{1}{2})$.

- 给定 , 将

$( \quad = \quad | \quad = \quad _j) \quad = 1 \; 2 \; \ldots$

称为在 $= \quad _j$ 的条件下, 的条件分布(列);

的条件分布类似. (7.3)



- 联合分布列⇔ 边缘分布列、条件分布列.

例2.2 & 2.3: 有大量粉笔, 含白、黄、红三种颜色, 比例分别为 $_1$, $_2$, $_3$. 从中抽取$n$ 支. 求: 恰好抽到 $_1$ 支白, $_2$ 支黄的概 .

- $( \quad = {}_1, \quad = {}_2) = \quad {}^{k_1}_{n} \quad {}^{k_2}_{n-k_1} \quad {}^{k_1}_{1} \quad {}^{k_2}_{2} \quad {}^{n-k_1-k_2}_{3}$ .
- 的边缘分布:

$$( \quad = {}_1) = \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \quad {}^{k_1}_{n} \quad {}^{k_2}_{n-k_1} \quad {}^{k_1}_{1} \quad {}^{k_2}_{2} \quad {}^{n-k_1-k_2}_{3}$$

$$= \quad {}^{k_1}_{n} \quad {}^{k_1}_{1} (1 - \quad {}_1)^{n-k_1}$$

- 的条件分布: 给定 $_1$,

$$( \quad = {}_2 | \quad = {}_1) = \frac{( \quad = {}_1, \quad = {}_2)}{( \quad = {}_1)} = \frac{\star\star}{**}$$

$$= \quad {}^{k_2}_{n-k_1} \left( \frac{{}_2}{{}_2 + {}_3} \right)^{k_2} \left( \frac{{}_3}{{}_2 + {}_3} \right)^{k_3} \qquad {}_2 = 0 \ 1 \ \cdots \ n - \quad {}_1$$

# 2. 连续型情形

- 定理2.1. 若 $=($ $,$ $)$ 是连续型, 则 $,$ 都是连续型, 且

$$_X(\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{X,Y}(\quad), \qquad _Y(\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{X,Y}(\quad),$$

- 称 $_X(\cdot)$ 与 $_Y(\cdot)$ 为 的边缘密度.
- 给定 , 满足 $_Y(\ ) > 0$. 称(关于 的函数)

$$_{X|Y}(\ |\ ) = \frac{(\ )}{_Y(\ )}, \quad \in \mathbb{R}$$

为在 $=$ 的条件下, 的条件密度. (7.5)

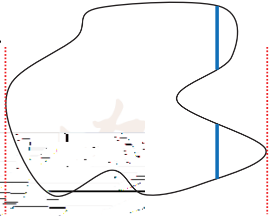
- 联合密度⇔ 边缘密度、条件密度.

- 定义2.5. 假设 是$\mathbb{R}^2$ 中面积为 的区域. 若

$$( \in A) = \frac{A\text{的面积}}{\text{的面积}} \quad \forall \text{子区域} A$$

则称 服从 上的均匀分布, 记为 $\sim$ ( ).

- 联合密度: $( \quad ) = \frac{1}{a}, ( \quad ) \in \quad .$



- 边缘密度:

$$_X( \ ) = \frac{|\ _{2,x}|}{\ } \qquad \in \ _1$$

其中, $_{2,x} = \{ \ : ( \quad ) \in \ \}$, $|\ _{2,x}|$ 为其总长度;

$_1 = \{ \ : |\ _{2,x}| > 0\}$.

- 条件密度: $_{Y|X}( \ | \ ) = \frac{1}{|G_{2,x}|}, \quad \in \ _{2,x}$.
- $_{Y|X}( \ | \ )$ 就是固定 , 将 ( ) 视为 的函数归一化,

$$_{Y|X}( \ | \ ) = \frac{1}{_X( \ )} ( \quad ).$$

例2.7. 为由 $= {}^2$ 和 $=$ 所围成的有限区域. $\sim$ ( ).

求: 的联合密度与边缘密度.

- 的面积: $= \int_0^1 \quad - \int_0^1 {}^2 \quad = \frac{1}{6}$.
- 联合密度: $( \quad ) = 6$, $( \quad ) \in$ .
- 边缘密度:

$$_X( \, ) = \int_{-\infty}^{\infty} ( \quad ) = \int_{x^2}^{x} 6 \quad = 6( \, - \, {}^2), \; 0 < \quad < 1.$$

$$_Y( \, ) = \int_{-\infty}^{\infty} ( \quad ) = \int^{\sqrt{y}} 6 \quad = 6(\sqrt{\quad} \quad ), \; 0 < \quad < 1.$$

- 条件密度: 固定 $\in (0 \;\, 1)$,

$$_{X|Y}( \, | \, ) = \frac{1}{\sqrt{y}-y}, \; \sqrt{\quad} \leqslant \quad \leqslant \quad .$$

- 注: $, ,$ 都取遍$(0 \;\, 1)$, 但 不能取遍$(0 \;\, 1) \times (0 \;\, 1)$.

- 定义2.6, 例2.8 & 例7.5. 若 $= (\ ,\ )$ 的联合密度 $(\ )$ 有如下表达式, 则称 服从二维(元)正态分布.

$$\frac{1}{2\ \ _1\ _2\sqrt{1-\ ^2}}\exp\left\{-\frac{\ ^2+\ ^2-2\ }{2(1-\ ^2)}\right\}$$

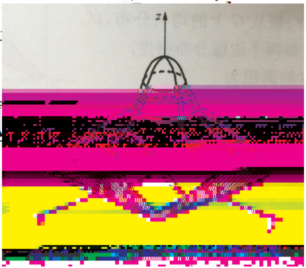
其中,

$$\frac{\ \ _1}{\ _1}\qquad\frac{\ \ _2}{\ _2}$$

有5个参数: $_1\ \ _2 \in \mathbb{R}$,

$$_1\ \ _2 > 0,$$

$$\in (-1\ \ 1).$$



- 联合密度: $= \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ , $= \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

$$\frac{1}{2\quad {}_1\ {}_2\sqrt{1-\ {}^2}}\exp\left\{-\frac{\ {}^2+\ {}^2-2\ }{2(1-\ {}^2)}\right\}$$

- 边缘密度: $\sim\ (\ {}_1\ \ {}^2_1)$, $\sim\ (\ {}_2\ \ {}_2)^2$. 例如,

$$X(\ )=\int_{-\infty}^{\infty}(\ \ ),$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\quad {}_1\sqrt{1-\ {}^2}}\exp\left\{-\frac{(\ -2\ )^2+(1-\ {}^2)\ {}^2}{2(1-\ {}^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\quad {}_1\sqrt{1-\ {}^2}}\ {}^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\ -2\ )^2}{2(1-\ {}^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\quad {}_1\sqrt{1-\ {}^2}}\ {}^{-\frac{1}{2}u^2}\sqrt{2\ (1-\ {}^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}\quad {}_1}\ {}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

- 联合密度: $= \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ , $= \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

$$\exp\left\{-\frac{{}^2 + {}^2 - 2}{2(1- {}^2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2 \quad {}_1 \; {}_2\sqrt{1- {}^2}} \exp\left\{-\frac{( \; -2 \quad)^2 + (1- {}^2) \; {}^2}{2(1- {}^2)}\right\}$$

- 边缘密度: $_X(\;) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \quad \frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}$.

- 条件密度:

$$_{Y|X}(\;|\;) = \frac{(\;)}{_X(\;)} \quad \frac{}{\sqrt{2} \quad {}_2\sqrt{1- {}^2}} \exp\left\{\frac{( \; - {}^2 \quad )^2}{2(1- {}^2)}\right\}$$

- 另解:

$$_{Y|X}(\;|\;) = \frac{1}{_X(\;)} \; (\qquad) = \hat{} \; \exp\left\{-\frac{(\frac{y-\mu_1}{\sigma_2} - 2 \quad)^2}{2(1- {}^2)}\right\}$$

例2.9. $= ( \ , \ )$ 与 $= ( \quad )$ 分别有联合密度

$$( \quad ) = \frac{1}{2} \ {}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad ( \ , \ ) = 2 \ ( \ , \ ) \qquad , \ > 0.$$

- 服从二维正态分布, $\ , \ \sim \ (0 \ 1)$, $= 0$.
- 不服从二维正态分布.
- 但 $\sim \ (0 \ 1)$. 例如, $\forall \ > 0$,

$$U(\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} ( \ , \ ) \ = \int_{0}^{\infty} 2 \ ( \ , \ )$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\ } \ {}^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \ , \ = \frac{1}{\ } \ {}^{-\frac{u^2}{2}} \int_{0}^{\infty} {}^{-\frac{v^2}{2}} \ , \$$

$$= \frac{1}{\ } \ {}^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ {}^{-\frac{u^2}{2}}.$$

- 注: 都是正态变量, 不能推出( ) 是二维正态向量.

- 定义2.7. 称 $(\quad) = (\quad \leqslant \quad , \quad \leqslant \quad)$ 为$(\quad , \quad)$ 的联合分布函数, 也记为 $_{X,Y}(\quad)$.

- 联合分布函数的性质: “单调”、“规范”、右连续,

$$(\ _2 \quad _2) - (\ _1 \quad _2) - (\ _2 \quad _1) + (\ _1 \quad _1) \geqslant 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\quad) = \lim_{y\to-\infty} (\quad) = 0 \qquad \lim_{x,y\to+\infty} (\quad) = 1.$$

- 连续型向量:

$$(\quad) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} (\quad), \ , \ , \quad \Rightarrow \quad (\quad) = \frac{\partial^2}{\partial \quad \partial}(\quad).$$