§ 随机变量的函数

- 函数f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto y=f(x)$ 定理 要求是 函数
随机变量X 的函数指 一个新的随机变量

$$Y=f(X)\quad \omega\mapsto f(X(\omega)).$$

- 目标 求Y 的分布列或密度函数

- 例 假设X 的分布列为$P(X=x_i)=p_i$ $\forall i$ 则Y 也是离散型 将其可能取值记为y_j $\forall j$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i:f(x_i)=y_j} p_i.$$

例 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布

- 分布函数法 第一步 将$Y \leqslant y$ 改写为$X \leqslant \mu + \sigma y$ 从而

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant \mu + \sigma y).$$

- 第二步 代入X 的密度 做变量替换

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

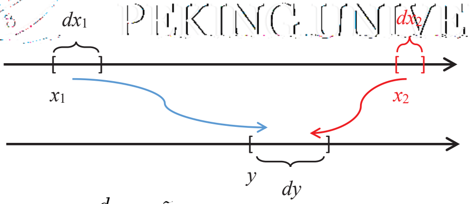
- 第三步 求导 得到$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ 即$Y \sim N(\quad,\quad)$
- 一般地 $Z = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ 其中$b \neq$

- 一对一情形 定理 假设f 连续可导 $f'(x) >$ $\forall x$ 则

$$p_X(x)dx = p_Y(y)dy \to p_Y(y) = p_X(x)\frac{}{f'(x)} = p_X(g(y))g'(y).$$

- 对一情形* f 为分段的一对一情形的函数 例如 f 是项式函数 都有

$$p_Y(y) = \sum_{x_i:f(x_i)=y} p_X(x_i)\frac{}{|f'(x_i)|}.$$



- 若$X \overset{d}{=} \tilde{X}$ 则$f(X) \overset{d}{=} f(\tilde{X})$

例　假设$X \sim N(\ ,\ )$ $Y = X^2$ 求Y 的密度函数

- 方法一、分布函数法　对任意$y >$

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow p_Y(y) = p_X(\sqrt{y})\frac{d\sqrt{y}}{dy} - p_X(-\sqrt{y})\frac{d(-\sqrt{y})}{dy} = \frac{}{\sqrt{\ \pi y}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

- 方法二、用[illegible]对一公式
- 第一步　确定每个$y >$ 　的原像点　$x_1 = \sqrt{y}$　$x_2 = -\sqrt{y}$
- 第二步　求出每个x_i 的贡献　$p_X(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$
- 第三步　对i 求和

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{2} p_X(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \frac{}{\sqrt{\ \pi y}}e^{-\frac{y}{2}},\quad \text{其中}y > \ .$$

- 注　$X^2 \sim \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

反例 假设$X \sim N(\; , \;)$ $Y = f(X)$ 其中

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 若\ |x| > \\ \;, & 若\ |x| \leqslant \; . \end{cases}$$

- Y 不是连续型

$$P(Y = \;) = P(|X| \leqslant \;) > \; .$$

- f 在$(- \; , \;)$上恒有$f'(x) =$

例 已知$Y = \mathrm{n}\, X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求X 的分布

- 称X 服从对数正态分布
- $X = e^Y >$ 因此 $\forall x >$ 有

$$G_X(x) = P(X > x) = P(Y > \mathrm{n}\, x)$$

$$= \int_{\ln x}^{\infty} \frac{}{\sqrt{\ \pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= \int_{x}^{\infty} \frac{}{\sqrt{\ \pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{}{u} du.$$

- $p_X(x) = -G'_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x >$

- 定义　设F 是分布函数 满足单调、规范、右连续　令

$$F^{-1}(p) = \mathrm{n}\,\{x \quad F(x) \geqslant p\} \quad \forall p \in (\ ,\ )$$

称F^{-1} 为F 的广义反函数

- 定理　假设F 是分布函数

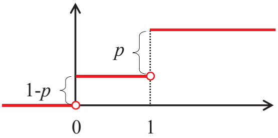
若$U \sim U(\ ,\ )$ 则$X = F^{-1}(U)$ 满足$F_X = F$

- 证明　$F^{-1}(p) \leqslant x$ 当且仅当$p \leqslant F(x)$ 于是

$$P(X \leqslant x) = P(F^{-1}(U) \leqslant x) = P(U \leqslant F(x)) = F(x).$$

- 例　假设F_X 连续　则

$$Y = F_X(X) \sim U(\ ,\ ).$$



- F_X 不连续时的反例　$X \sim B(\ , p)$