

## §2.3 连续型随机变量

- 定义3.1. 连续型随机变量指: 存在 $p(x)$  使得

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx, \quad \forall a < b.$$

称 $p(\cdot)$  为 $X$  的概率密度(函数), 也记为 $p_X(\cdot)$ .

- 非负:  $p(x) \geq 0$ ; 规范:  $\int p(x)dx = 1$ .

$P(X = x) = 0$  vs  $p(x) \geq 0$ .

- $p(\cdot)$  在 $x$  连续, 则 $P(X \in [x, x + \Delta x]) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ,
- 单独谈论一个点 $x$  对应的 $p(x)$  没有意义.

1. 均匀分布,  $X \sim U(a, b)$  (参数  $a < b$ ):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & \text{若 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

•  $a \leq b \leq x$  可改为  $a < x < b$ ,  $a < x \leq b$ ,  $a \leq x < b$ .

•  $p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{\{a \leq x \leq b\}}$ .

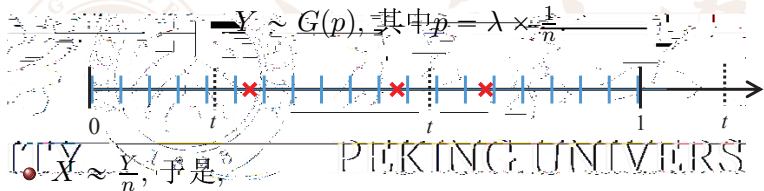
•  $p(x) = \frac{1}{b-a}$ , 其中  $a \leq x \leq b$ .

• 模型: 几何概型.

2. 指数分布,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  (参数  $\lambda > 0$ ):

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- 模型: 例2.3.  $X =$  第一个粒子的放射时刻. 等待时间、寿命.
- 第一个粒子在第  $Y$  个微观时间放出, 则



$$P(X > t) \approx P(Y > nt) \approx (1 - p)^{nt} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt} \approx e^{-\lambda t}.$$

- $P(X > t) = e^{-\lambda t} = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx.$
- 定理3.1.(无记忆性):  $P(X - s > t | X > s) = e^{-\lambda t}, \forall t, s \geq 0.$

3. 正态分布,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (参数  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

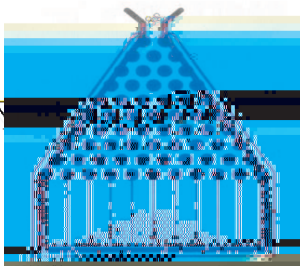
● 标准正态分布  $N(0, 1)$ :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

§1.7. 第二近似公式:  $C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$

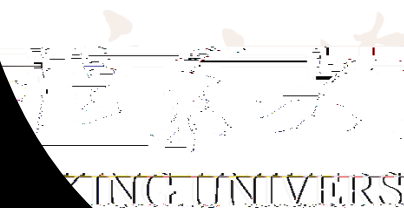
$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

高尔顿钉板试验



•  $\phi(x)$  的平方写为二重积分:

$$\int \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



*θ. R. d pm tre md...*

- 函数 $\Phi$ :

$$\Phi(x) = \int^x \phi(x)dx.$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

- 定理3.2: 令  $x = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , 则

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

- 推论3.1. 查表得 $\Phi(3) = 0.9987$ , 因此

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9974.$$

4. 威布尔(Weibull)分布,  $X \sim W(m, \eta)$  (参数  $m, \eta > 0$ ):

$$p(x) = \frac{m}{\eta^m} x^{m-1} \exp \left\{ - \left( \frac{x}{\eta} \right)^m \right\}, \quad x > 0.$$

$$\int_0^{\infty} m y^{m-1} e^{-\left(\frac{y}{\eta}\right)^m} dy = \int_0^{\infty} e^{-z} dz = 1.$$

•  $m > 0$ : 形状参数;  $\eta > 0$ : 尺度参数

•  $m = 1$  时就是指数分布  $\text{Exp}\left(\frac{1}{\eta}\right)$

• 应用: 机电产品的寿命; 可靠性研究.

5. 伽玛分布,  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  (参数  $\alpha, \beta > 0$ ):

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha):$

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = -y^\alpha e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

- $\Gamma(1) = 1; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}:$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y} dy = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

- $\alpha = 1$  时就是指数分布  $\text{Exp}(\beta)$ .