§2.2 离散型随机变量

- 定义2.1. X 是离散型随机变量指: X 取有限个值$x_1, \cdots, x_n$, 或可列个值$x_1, x_2, \cdots$. X 的概 分布(列)指:

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, \cdots, n \quad 或$$

1. 两点分布(伯努利分布), $X \sim B(1,p)$ (参数$0 \leqslant p \leqslant 1$):

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p.$$

- 模型: 投币,

  投到H 则$X=1$; 投到T 则$X=0$.

- 示性函数1_A:

  事件A 发生则取1; A 不发生则取0.

- 例2.1. 100 件产品中有3 件次品. 从中任取一件.

$$A= \text{“取到合格品”}, X=1_A, p=0.97.$$

- $p=0$ 或1 时, $X \equiv 0$ 或1, 即, X 退化.

2. 二项分布, $X \sim B(n,p)$ (参数$n \geqslant 1$, $0 \leqslant p \leqslant 1$):

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \ k = 0, 1, \cdots, n.$$

- 模型: 独立投币n 次, 正面的总次数.
- 定理2.1: 分布列的最大值点k_0 如下:

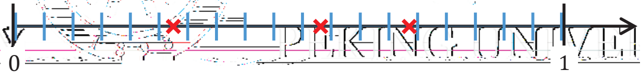
若$(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, 则$k_0 = [(n+1)p]$;

若$(n+1)p \in \mathbb{Z}$, 则$k_0 = (n+1)p$ 或$(n+1)p-1$.

3. 泊松分布, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (参数: $\lambda > 0$):

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

- 模型: 例2.3. 研究放射性物质在8 分钟内放射出的粒子数X.
- 近似: 以$\frac{1}{n} * 8$分钟为一个微观时间.



- (i) 在一个微观时间内放射粒子的概 为$p = \frac{\lambda}{n}$,

  (ii) 不同的微观时间内是否放射粒子相互独立.

- X 近似服从$B(n,p)$, 故

$$P(X=k) \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^n \approx \frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- 上式即为§1.7 第一近似公式.
-

4. 超几何分布, $X \sim H(N, D, n)$ (参数N, D, n):

$$P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

- 模型: N个产品, D 个次品, 任取n 个, 抽到的次品数为X.
- 放回抽样vs 不放回抽样: 二项分布vs 超几何分布.
- 定理2.3: 给定n. 当$N \to \infty$, $\frac{D}{N} \to p$ 时,

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \to C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \geqslant 0.$$

- 读解定理2.3: 例$n=5$. H 表示次品, T 表示合格品, 则

$$HHTHT: \frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}\cdot\frac{N-M}{N-2}\cdot\frac{M-2}{N-3}\cdot\frac{N-M-1}{N-4} \to p^3q^2.$$

5. 几何分布, $X \sim G(p)$, 参数$0 < p < 1$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

- 模型: 独立重复投币中, 第一次投到H 时的投币次数.
- $P(X > n) = (1-p)^n, \forall n \geqslant 0.$
- 无记忆性: $P(X - n = k | X > n) = P(X = k).$

- 6. 负二项分布, $X \sim NB(r,p)$, 参数$r \geqslant 1$, $0 < p < 1$:

$$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \cdots$$

- 模型: 独立重复投币中, 第r次投到H时的投币次数.
- 7. 离散均匀分布,

$$P(X=k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \cdots, N.$$

- 模型: 古典概型.