§1.5 条件概　与独立性

例5.1 设盒中有3个白球、2个红球, 从中取出一个球, 发现是白球. 从剩下的4个球中任取一个, 求: 它还是白球的概　(记为p).

- 建模: 不放回抽样, 白球$1 \sim 3$, 红球$4, 5$. $\omega = (i, j)$.
- $A = \{\omega : i \leqslant 3\}$, $B = \{\omega : j \leqslant 3\}$.
-

	$(1,2)\surd$	$(1,3)\surd$	$(1,4)$	$(1,5)$
$(2,1)\surd$		$(2,3)\surd$	$(2,4)$	$(2,5)$
$(3,1)\surd$	$(3,2)\surd$		$(3,4)$	$(3,5)$
$(4,1)\surd$	$(4,2)\surd$	$(4,3)\surd$		$(4,5)$
$(5,1)\surd$	$(5,2)\surd$	$(5,3)\surd$	$(5,4)$	

- $p = P(AB)/P(A) = 6/12 = 1/2$, $p \neq 3/5 = P(B)$.

- 定义5.1. 假设$P(A) > 0$. 称$\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为已知A 发生的条件下, B 的条件概 . 记为$P(B|A)$.
- 按照定义直接计算条件概 $P(B|A)$.
- 条件概 指“重新分配权重”: $P(B|A)$ vs $P(B) = P(B|\Omega)$. 给定A, 条件概 $P(\cdot|A)$: 满足概 定义的三个条件.
- 简化模型给出条件概 : 在假设A 发生时, 简化模型. 例5.1: 3白2红. A =一白, B =二白. (若) A 发生, 则第二次在2白2红中抽取, $P(B|A) = 2/4$.

- 乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

- 定理5.1(一般乘法公式):

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1 \cdots A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}) = \cdots$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

TY

PEKING UNIVERS

- 解法二、记

  A_1 = 红心Ace与黑桃Ace不在一组;

  A_2 = 梅花Ace与红心Ace黑桃Ace都不在一组;

  A_3 = 方块Ace与其他Ace都不在一组.

- 则$E = A_1A_2A_3$.

- $P(A_1) = \frac{3\times 13}{51}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2\times 13}{50}$, $P(A_3|A_1A_2) = \frac{13}{49}$.

- 因此,

$$P(E) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{3\times 2\times 13^3}{51\times 50\times 49}.$$

TY 1898 PEKING UNIVERS

TY 1898 PEKING UNIVERS

例. 甲、乙玩石头剪子布. 用A_0, A_2, A_5 分别表示甲出石头, 剪刀, 布; 类似地, 有B_0, B_2, B_5. 假设 $P(A_i) = P(B_j) = \frac{1}{3}$ 且A_i 与B_j 相互独立, $i, j = 0, 2, 5$.

令C = 甲赢. 研究A_2, B_5, C 的独立性.

-

TY 1898 PEKING UNIVERS

例5.9. 假设每门高射炮击中敌机的概　为0.6. 现在若干门同时发射. 问: 若要以99% 的把握击中敌机, 需要配几门?

- 假设配n 门. 记A_i = “第i 门击中敌机”. 则

$$A = \text{“击中敌机”} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$, 因此,

$$P(A^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 0.4^n.$$

- $P(A) = 1 - 0.4^n$. 要求$1 - 0.4^n \geqslant 0.99$, 即

$$n \geqslant \frac{\lg 0.01}{\lg 0.4} = \frac{2}{0.3979} = 5.026.$$

- 因此, 需要至　6 门高射炮.