§1 概 的公理化定义和性质

例 1 投掷两枚分币

- 建模 用H 表示正面 (国徽) 朝上 (

  用T 表示反面朝上 (
- 共有 种不同结果

$$\omega_1 = HH, \quad \omega_2 = HT, \quad \omega_3 = TH, \quad \omega_4 = TT.$$

- $A =$ “恰有一枚正面朝上” $= \{\omega_2, \omega_3\}$

  $B =$ “至 一枚正面朝上” $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

  $C =$ “恰好两枚正面朝上” $= \{\omega_1\}$

- 样本（ 试验结果 元素 记为ω
- 样本空间 所有试验结果组成的集合 记为
- 事件（ n 部分试验结果 的子集 记为$A, B, \ldots$
- 空集$\varnothing$
- 事件发生 （本次 试验结果$\omega \in A$

- “并” $A \cup B$, 事件A 发生或事件B 发生
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 某个事件A_i 发生

$$\{\omega, \ \exists\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 使得} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$

$$\{\omega, \ \exists\ i \text{ 使得} \omega \in A_i\},$$

- “交” $A \cap B$ AB, 事件A 发生且事件B 发生
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ $A_1 \cdots A_n$ 所有事件A_i 都发生

$$\{\omega, \forall i (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ $A_1 A_2 \cdots$

$$\{\omega, \forall i \geqslant 1 \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- “补” A^c, 事件A 不发生 余集 对立事件
- “差” $A\backslash B$, $= AB^c$
- 交换 、结合 、分配 例

$$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC).$$

- 对偶 例

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

- 例 若 $= [\ ,1]$ $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$ 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (\ , 1], \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c = \{\ \}.$$

定义 $\mathcal{F}$ 由一些事件组成 如果

($\in \mathcal{F}$

(若 $A \in \mathcal{F}$ 则 $A^c \in \mathcal{F}$

(若 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, \ , \cdots$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

则称 $\mathcal{F}$ 是 (中的 σ 代数 进一步 又若 P 是 $\mathcal{F}$ 上的函数

(非负性 $P(A) \geqslant$ $\forall A \in \mathcal{F}$

(规范性 (归一化条件 $P(\ ) = 1$

(可列可加性 若 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, \ , \cdots$ 且两两不交 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称 P 是 $\mathcal{F}$ 上的 概 称 $P(A)$ 为 A 发生 的概 称($, \mathcal{F}, P)$ 为概 空间

定理1 概 P 有如下性质

- ($P(\varnothing) =$

推导：取$A_n = \varnothing$, $\forall n$, 则$\infty \times P(\varnothing) = P(\varnothing)$, 从而$P(\varnothing) = 0$.

- (可加性 若$A_1, \cdots, A_n$ 两两不交 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

推导：取$A_m = \varnothing$, $\forall m \geqslant n+1$ 即可.

- ($P(A^c) = 1 - P(A)$

推导：取$A_1 = A$, $A_2 = A^c$, $A_n = \varnothing$, $\forall n \geqslant 3$ 即可.

- (单调性 若$A \subset B$ 则

$$P(B) \geqslant P(A), \quad P(B \backslash A) = P(B) - P(A), \qquad \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

推导：$P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geqslant P(A)$.

- (连续性 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = {}_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导：取$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$，$n \geqslant 2$. 则，$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，且$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

于是，左 $= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$\overset{\text{可加性}}{=} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) =$ 右.

- (连续性 若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = {}_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导：对A_n^c，$n \geqslant 1$ 使用(5).

- 7 次可列可加性 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

推导：取$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$，$n \geqslant 2$. 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 因此，

左$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \overset{\text{单调性}}{\leqslant}$ 右.

- Jo n公式仍然成立. 例

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例 离散概 空间

- $= \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 或 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$
- $\mathcal{F}$ 由 的所有子集组成
- $p_i \geqslant$ $i = 1, \cdots, n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
  或 $i = 1, \ , \cdots$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$
- $P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$
- 例 古典概型 $A_i = \{\omega_i\}$ 为等概基本事件 $i = 1, \ldots, n$
- 例 泊松分布列 $\lambda >$ $= \{ \ , 1, \ , \cdots\}$

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i}, \quad i = \ , 1, \ , \cdots.$$