第五章！乘È空间

- §5.1 有•维乘È空间(　)
- ~~§5.2 多维L-S 测度~~
- §5.3 可　维乘È空间
- §5.4 任意维乘È空间

§5.1 有 • 维乘 È 空间

- 乘积空间 X_1 X_n, 矩 / $\prod_{k=1}^{n} A_k$. e.g.

$$X \quad \prod_{k=1}^{n} X_k : \quad t\cancel{x} \quad px_1; \quad ; x_n q : x_k \; \mathrm{P} \; X_k; k \quad 1; \quad ; nu:$$

- 可测结构. 设 $\mathscr{F}_k$ 是 X_k 上的 代数, $(k \quad 1; \quad ; n)$.
- 可测矩 / :

$$\mathscr{Q} : \quad t \quad : A_k \; \mathrm{P} \; \mathscr{F}_k; k \quad 1; \quad ; nu:$$

- · 题5.1.1. $\mathscr{Q}$ 是Œ , , 且 $X \; \mathrm{P} \; \mathscr{Q}$.
- 乘 È 代数,

$$\mathscr{F} \quad \mathscr{F}_1 \qquad \mathscr{F}_n \quad \prod_{k=1}^{n} \mathscr{F}_k : \quad p\mathscr{Q}q:$$

- 投影: $_k$: px_1; $\quad$;x_nq ÞÑ x_k.
- · 题5.1.2. (1) $_k$: p$X;\mathscr{F}$q Ñ p$X_k;\mathscr{F}_k$q, 是可测映射;

  (2) $\mathscr{F}$ $\quad$ $\left(\bigcup_{k=1}^{n} \ {}_k^{-1}\mathscr{F}_k\right)$

  $$\left(\left\{ \mathrm{t}\cancel{x} : x_k \ \mathrm{P}\ A_k \mathrm{u} : 1 \ ¤ \ k \ ¤ \ n; A_k \ \mathrm{P}\ \mathscr{F}_k \right\}\right).$$
- 定n 5.1.3. 设f $\quad$ pf_1; $\quad$;f_nq : Ω Ñ X.

  则f : pΩ; $\mathscr{S}$q Ñ p$X;\mathscr{F}$q 可测当且仅当f_k 可测, @k.
- 截口. 设A P $\mathscr{F}$, f : p$X;\mathscr{F}$q Ñ p$Y;\mathscr{S}$q.

$$A|_{x_1;\cdots;x_i} \quad \mathrm{tp}x_{i+1}; \quad ;x_n\mathrm{q} : \mathrm{p}x_1; \quad ;x_n\mathrm{q}\ \mathrm{P}\ A\mathrm{u}:$$

$$f|_{x_1;\cdots;x_i} : \mathrm{p}x_{i+1}; \quad ;x_n\mathrm{q}\ \text{ÞÑ}\ f\mathrm{p}x_1; \quad ;x_n\mathrm{q}:$$

- 定n 5.1.4. $A|_{x_1;\cdots;x_i}$, $f|_{x_1;\cdots;x_i}$ P $\prod_{k=i+1}^{n}\mathscr{F}_k$.

- 测度. ~, é 合= 边缘 条件,

$$P p \quad P A_1; \quad P A_2 q \quad \int_{A_1}\int_{A_2} p \mid p x_2 | x_1 q \, d x_2 p \quad p x_1 q \, d x_1$$

$$\int_{A_1} \quad p A_2 | \quad x_1 q \quad p d x_1 q:$$

- 定义5.1.1. $pp\,;\,q : pX_1; \mathscr{F}_2 q$ Ñ $\mathbb{R}$, $px_1; A_2 q$ ÞÑ $ppx_1; A_2 q$ 为从$pX_1; \mathscr{F}_1 q$ 到$pX_2; \mathscr{F}_2 q$ 的转移函数, 指:

  (1) 固定x_1 P X_1, $ppx_1; q$ 固定x , pp x 1; 定□□2qX073p

pxq • A_2 8:1q = 函数. pxq A_2 $p: q$ 函数

- 记p$X;\mathscr{F}$q : pX_1 q

- $X \quad \prod_{k=1}^{n} X_k, \mathscr{F} \quad \prod_{k=1}^{n} \mathscr{F}_k.$
- 定 n 5.1.9(归纳). (1) 设p_k 为从p$\prod_{i=1}^{k-1} X_i; \prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{F}_i$q 到p$X_k; \mathscr{F}_k$q 的 有 • 的转移函数. @$X_1$ 上(有 • 的)测度 $_1$, D!X 上(有 • 的)的测度 使得

$$\mathrm{p}\prod_{k=1}^{n} A_k\mathrm{q} \quad \int_{A_1} {}_1\mathrm{pd}x_1\mathrm{q} \int_{A_2} p_2\mathrm{p}x_1; \mathrm{d}x_2\mathrm{q}$$

$$\int_{A_n} p_n\mathrm{p}x_1; \quad ; x_{n-1}; \mathrm{d}x_n\mathrm{q};$$

(2) 若f 为p$X; \mathscr{F};$ q 上的可测函数且 È 存在, 则

$$\int_X f\,\mathrm{d} \quad \int_{X_1} {}_1\mathrm{pd}x_1\mathrm{q} \int_{X_2} p_2\mathrm{p}x_1; \mathrm{d}x_2\mathrm{q}$$

$$\int_{X_n} p_n\mathrm{p}x_1; \quad ; x_{n-1}; \mathrm{d}x_n\mathrm{q} f\,\mathrm{p}x\mathrm{q}.$$

- 定 n 5.1.10(乘 È 测度). Esp. $p_k\mathrm{p}x_1; \quad ; x_{k-1};$ q $\quad k.$

§5.3 可 维乘È空间的V 测度

- 一 可测空间: $\mathrm{p}X_n; \mathscr{F}_n\mathrm{q}$, n 1; 2;
- X $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$: tx p$x_1; x_2;$ q : x_n P X_n; @nu.
- 投影: $_n : X$ Ñ X_n, $_{(n)} : X$ Ñ $X_{(n)}$: $\prod_{k=1}^{n} X_k$.
- 有 • 维: 在$X_{(n)}$ 上, $\mathscr{F}_{(n)}$: $\prod_{k=1}^{n} \mathscr{F}_k$ p$\mathscr{Q}_{(n)}$q,

  $\mathscr{Q}_{(n)}$: t$\prod_{k=1}^{n} A_k : A_k$ P $\mathscr{F}_k; k$ 1; ; nu.

- 用 $_{(n)}$ 嵌入X. 有 • 维可测(矩 /)柱集:

  $\mathscr{Q}_{[n]}$: $\{Q_{(n)} \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k : Q_{(n)}$ P $\mathscr{Q}_{[n]}\}$ $_{(n)}^{-1}\mathscr{Q}_{(n)}$;

  $\mathscr{F}_{[n]}$: $\{A_{(n)} \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k : A_{(n)}$ P $\mathscr{F}_{(n)}\}$ $_{(n)}^{-1}\mathscr{F}_{(n)}$.

- · 题5.3.1. $\mathscr{Q}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{Q}_{[n]}$ 是Œ , , 且X P $\mathscr{Q}$;

  $\mathscr{A}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{[n]}$ 是代数;

  $\mathscr{F}$ $\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$: p$\mathscr{Q}$q p$\mathscr{A}$q pt $_n$; @$n$uq.

定 n (定 n 5.3.2, Tulcea 定 n)

设p_k : p$\prod_{i=1}^{k-1} X_i$; $\prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{F}_i$q Ñ p$X_k$; $\mathscr{F}_k$q Ç 转移函数, k ¥ 2. 则@pX_1; $\mathscr{F}_1$q 上的 Ç P_1, D!p$\prod_{k=1}^{\infty} X_k$; $\prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{F}_k$q 上的 Ç P 使

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k\right)$$

$$(\star) \int_{A_1} P_1 \mathrm{pd}x_1\mathrm{q} \int_{A_2} p_2 \mathrm{p}x_1; \mathrm{d}x_2\mathrm{q} \int_{A_n} p_n \mathrm{p}x_1; \quad ; x_{n-1}; \mathrm{d}x_n\mathrm{q}:$$

(1) p q 定义$\mathscr{F}_{(n)}$ p$\mathscr{Q}_{(n)}$q 上的 V (定 n 5.1.9), ✓;

(2) | 用 $_{(n)}$ 得到$\mathscr{F}_{[n]}$ $^{-1}_{(n)}\mathscr{F}_{(n)}$ 上的 V P_n, ✓;

(3) 证 ² P_n $P_{n+1}|_{\mathscr{F}_{[n]}}$, 故得到$\mathscr{A}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{[n]}$ 上的函数P.

(4) 证 ² P 是$\mathscr{A}$ 上的 V , 从 惟一地 * 张到$\mathscr{F}$ p$\mathscr{A}$q 上.

(4) 证 ² P_n $P_{n+1}|_{\mathscr{A}_{[n]}}$.

- @A P $\mathscr{F}_{[n]}$ ${}_{(n)}^{-1}\mathscr{F}_{(n)}$, D!$A_{(n)}$ P $\mathscr{F}_{(n)}$ 使得A ${}_{(n)}^{-1}A_{(n)}$. 则

$$P_n pAq : \int_{X_1} P_1 p dx_1 q \int_{X_2} p_2 p x_1; dx_2 q$$

$$\int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}} p x_1; \quad ; x_n q p_n p x_1; \quad ; x_{n-1}; dx_n q.$$

- D!$A_{(n+1)}$ P $\mathscr{F}_{(n+1)}$ 使得A ${}_{(n+1)}^{-1}A_{(n+1)}$.
- $A_{(n+1)}$ $A_{(n)}$ X_{n+1}: (n) $(n+1)\rightarrow(n)$ $(n+1)$, 故

$${}_{(n)}^{-1}A_{(n)} \quad {}_{(n+1)}^{-1} \quad {}_{(n+1)\rightarrow(n)}^{-1}A_{(n)} \quad {}_{(n+1)}^{-1}pA_{(n)} \quad X_{n+1}q.$$

- $P_{n+1}pAq$ $P_n pAq$:

$$\int_{X_{n+1}} \mathbf{I}_{A_{(n)}\times X_{n+1}} p x_1; \quad ; x_n; x_{n+1} q p_{n+1} p x_1; \quad ; x_n; dx_{n+1} q.$$

(5) 证 ² P 是$\mathscr{A}$ 上的V .

- P 具有可加5. 只 I 证 ² P 在H (上) ë Y:

  若$A_{[1]};A_{[2]};$ P $\mathscr{A}$, $A_{[n]}$ Ó H, 则Pp$A_{[n]}$q Ñ 0.

- n 由(定 n 2.1.6): 设$A_1;A_2;$; A : $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ P $\mathscr{A}$, 则

$$A_{[n]} \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i \quad A \quad \sum_{i=1}^{n} A_i \text{ P } \mathscr{A};\ P\text{p}A_{[n]}\text{q} \quad P\text{p}A\text{q} \quad \sum_{i=1}^{n} P\text{p}A_i\text{q}:$$

- 证 验证 : ¸ 设 Pp$A_{[n]}$q Û 0, 则" : Ó $\lim_{n\to\infty} P$p$A_{[n]}$q ¡ 0.

- 存在1 ¤ m_1 m_2 使得$A_{[n]}$ P $\mathscr{F}_{[m_n]}$, @n.

  不 设m_n n, 则考 $B_{[k]}$: $A_{[n]}$; m_n ¤ k m_{n+1}.

- D!$A_{(n)}$ 使得$A_{[n]}$ $\overset{-1}{(n)}A_{(n)}$, 则

$$A_{[n]} \quad \overset{-1}{(n+1)}\text{p}A_{(n)} \quad X_{n+1}\text{q} \ldots A_{[n+1]} \text{ ñ } A_{(n)} \quad X_{n+1} \ldots A_{(n+1)}:$$

(5) 证 ² P 是$\mathscr{A}$ 上的 V （Y）.

- $A_{(n)}$ X_{n+1} ... $A_{(n+1)}$. 等价地,

$$\mathbf{I}_{A_{(n+1)}}\text{p}x_1; \quad ;x_{n+1}\text{q} ¤ \mathbf{I}_{A_{(n)}}\text{p}x_1; \quad ;x_n\text{q}:$$

- 0 ¤ $_{1;n+1}\text{p}x_1\text{q}$ ¤ $_{1;n}\text{p}x_1\text{q}$ ¤ 1, 其中 $_{1;n}\text{p}x_1\text{q}$:

$$\int_{X_2} p_2\text{p}x_1;\mathrm{d}x_2\text{q} \quad \int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}}\text{p}x_1; \quad ;x_n\text{q}p_n\text{p}x_1; \quad ;x_{n-1};\mathrm{d}x_n\text{q}:$$

- 注: $P\text{p}A_{[n]}\text{q}$ $P_n\text{p}A_{[n]}\text{q}$ $\int_{X_1}$ $_{1;n}\text{p}x_1\text{q}P_1\text{pd}x_1\text{q}$.
- $_1$: Ó $\lim_{n\to\infty}$ $_{1;n}$, 则由DCT,

$$\int_{X_1} {}_1\mathrm{d}P_1 \quad Ó \lim_{n\to\infty}\int_{X_1} {}_{1;n}\mathrm{d}P_1$$ " ¡ 0; pŠ据¸ 设q:

(5) 证 ² P 是$\mathscr{A}$ 上的 V （Y）.

- D$\tilde{x}_1$ P X_1 使得 ${}_1 p\tilde{x}_1 q$ ¡ 0.
- $\tilde{x}_1$ P $A_{(1)}$. 则

$$\mathbf{I}_{A_{(n)}} p\tilde{x}_1; x_1; \quad ; x_n q \;¤\; \mathbf{I}_{A_{(1)}} p\tilde{x}_1 q \quad 0 \;ñ\; {}_{1;n} p\tilde{x}_1 q \quad 0; @n:$$

- ${}_2 p x_2 q$ Ó $\lim_{n\to\infty}$ ${}_{2;n} p x_2 q$, 其中 ${}_{2;n} p x_2 q$:

$$\int_{X_3} p_3 p\tilde{x}_1; x_2; \mathrm{d}x_3 q \qquad \int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}} p\tilde{x}_1; x_2; \quad ; x_n q p_n p\tilde{x}_1; x_2; \quad ; x_{n-1}; \mathrm{d}x_n q:$$

- D$\tilde{x}_2$ 使得$p\tilde{x}_1; \tilde{x}_2 q$ P $A_{(2)}$ 使得 ${}_2 p\tilde{x}_2 q$ ¡ 0.
- $p\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \quad q$ P $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{[n]}$ H, g 盾!
- 故$P pA_{[n]} q$ Ñ 0, 即P 在H (上) ë Y .

定 n （定 n 5.3.3, Kolmogorov 定 n ）

设P_k p$X_k; \mathscr{F}_k$q 上的 Ç，则D!p$\prod_{k=1}^{\infty} X_k; \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{F}_k$q 上的测度$P$ 使得

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k \quad \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k\right) \quad \prod_{k=1}^{n} P_k pA_k q:$$

- 证: 取p_k : p$\prod_{i=1}^{k-1} X_i; \prod_{i=1}^{k-1} \mathscr{F}_i$q Ñ p$X_k; \mathscr{F}_k$q 为$P_k$ 即可.

§5.4 任意无穷维乘È空间的V　测度

- 一族　空集合t$X_t; t$ P Tu. 其中, 指标集T 不可数.
- **乘积空间.** X　$\prod_{t\in T} X_t$:　t t$x_t; t$ P Tu : x_t P $X_t; t$ P Tu.
- 注: 若X_t　X_0, 则$x : T$ Ñ X_0 为T 上取X_0 值的 / 函数0 .
- **投影/限制.** @t P T, @U „ S „ T,

$$_t : X \ Ñ \ X_t; \quad x \ \text{ÞÑ} \ x_t;$$

$$_S : X \ Ñ \ X_S \quad \prod_{t\in S} X_t; \quad x \ \text{ÞÑ} \ x_S : \quad \text{t}x_t; t \ \text{P} \ S\text{u};$$

$$_{S\to U} : X_S \ Ñ \ X_U; \quad _{S\to U} \quad _S \quad _U.$$

- 可测结构. 设$\mathscr{F}_t$ 是X_t 上的 代数, @t P T.
- 有 • 维可测(矩 /)柱集: $|S|$ 8 .

$$\mathscr{Q}_S \quad \left\{ {}_S^{-1}\left(\prod_{t\in S} A_t\right); A_t \text{ P } \mathscr{F}_t; @t \text{ P } S \right\}; \quad \mathscr{F}_S \quad \text{p}\mathscr{Q}_S\text{q:}$$

- · 题5.4.1 & 5.4.2. $\mathscr{Q}_S$, $\mathscr{Q}$ $\bigcup_{S\subseteq T;|S|<\infty} \mathscr{Q}_S$ 是Œ , 且Q X.
- · 题5.4.3. $\mathscr{A}$: $\bigcup_{S\subseteq T;|S|<\infty} \mathscr{F}_S$ 是代数且... $\mathscr{Q}$.
- · 题5.4.4. $\mathscr{F}$: p$\mathscr{Q}$q p$\mathscr{A}$q, 且

$$\mathscr{F} \quad \text{p}t \quad {}_t; t \text{ P } T\text{uq} \quad \text{t} \quad {}_S^{-1}A : A \text{ P } \mathscr{F}_S; S\text{可} \quad \text{u:}$$

- 注1: : $\left(\bigcup_{t\in T} {}_t^{-1}\mathscr{F}_t\right)$.
- 注2: 证 ² $\mathscr{F}_0$ t ${}_S^{-1}A : A$ P $\mathscr{F}_S; S$可 u 是 代数.

- **随机过程**. pΩ; $\mathscr{S}$q 为(样本)可测空间.
  指标集T 视为 / 时间 Θ . 时刻t P T, 取值空间为pX_t; $\mathscr{F}_t$q.
- f_t : Ω Ñ X_t, @t P T.
  f : tf_t; t P Tu 视为Ω Ñ X : $\prod_{t\in T} X_t$ 的映射.
- 定 n 5.4.5. 记$\mathscr{F}$ $\prod_{t\in T} \mathscr{F}_t$. 则

  f : pΩ; $\mathscr{S}$q Ñ pX; $\mathscr{F}$q iff f_t : pΩ; $\mathscr{S}$q Ñ pX_t; $\mathscr{F}_t$q; @t P T:

- 若pX_t; $\mathscr{F}_t$q pS; $\mathscr{S}_0$q, 则称f 是随 Å 过程; 称S 为(取)值空间/状态空间; 称fp$!$q tf_tp$!$q : t P Tu P S^T 为轨道.

(1) $@n ¥ 1, t_1; \quad ; t_n$ P T p不 f 同, $P_{t_1;\cdots;t_n}$ 是$\mathscr{B}^n_{\mathbb{R}}$ 上的V .

(2) 对$t_1; \quad ; t_n$ 的任意重排$tp1q; \quad ; tpnq$,

$$P_{t_1;\cdots;t_n}\left(\prod_{i=1}^{n} A_{t_i}\right) \quad P_{t(1);\cdots;t(n)}\left(\prod_{i=1}^{n} A_{t(i)}\right);$$

(3) $P_{t_1;\cdots;t_n;t_{n+1}} p\prod_{i=1}^{n} A_{t_i} \quad \mathbb{R}q$.

- 定义5.4.1. 若**P** : $tP_{t_1;\cdots;t_n} : n ¥ 1; t_1; \quad ; t_n u$ 足以上三条, 则称它是 f 容的.
- 由(2) 可定义P_S, $@S$ „ T, $|S|$ 8 .
- 由(3), $|S|$ 8 , U „ S ñ $P_S \quad {}^{-1}_{S\to U} \quad P_U$.

定 n （定 n 5.4.8, Kolmogorov 定 n ）

若$\mathbf{P}$ 是相容的, 则$D!p\mathbb{R}^T; \mathscr{B}^T_{\mathbb{R}}q$ 上的 $\c{C} P$, 使得

$$P p \ {}_S^{-1} A q \quad P_S pAq; \quad @|S| \quad 8; A \text{ P } \mathscr{B}^S_{\mathbb{R}}:$$

- $\mathscr{F}_0 \quad t \ {}_{T_0}^{-1} pAq : A \text{ P } \mathscr{F}_{T_0}; T_0$可 u.
- Step 1. (引 n 5.4.6). 固定可 的T_0 „ T, 定义$P p \ {}_{T_0}^{-1} A q$.

  将T_0 中的指标编号: $t_1; t_2;$, 视为$1; 2;$.

  由n Ñ n 1 f 容, 可产生正则条件 V , 此即转移 V 测度.

  用Tulcea 定 n , ✓.
- Step 2.1. (引 n 5.4.7). 对不同编号 û 定. 由重排 f 容, ✓.
- Step 2.2. 对不同的T_0 û 定:

  $T_1; T_2$ 可 , ${}_{T_1}^{-1} A_1 \quad {}_{T_2}^{-1} A_2$. 则$P_{T_1} pA_1 q \quad P_{T_2} pA_2 q$.

Step 3. P 为V .

- 设$A_1; A_2;$ P $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}^T$, ü ü 不交.
- DT_n „ T 可 , B_n P $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}^{T_n}$ 使得A_n $T_n^{-1}B_n$.
- T_0 $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. P_{T_0} 是$\mathscr{F}_{T_0}$ 上的V , 故✓.

定 n （定 n 5.4.9）

$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, P_t)$, $t \in T$ 是 Ç 间. 则 $\exists!\,(\mathbb{R}^T, \mathscr{B}^T_{\mathbb{R}})$ 上的 Ç P, 使得

$$P(x : x_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n) = \prod_{i=1}^{n} P_{t_i}(A_i).$$

- 注: 定 n 中的P 记为$\prod_{t \in T} P_t$.