1　章、符Ò测Ý

x4.1 符Ò测Ý

- $(X;\mathscr{F})$ 可测空间. ï究é象:

$$'(A) := \int_A f\,\mathrm{d}\ ;\quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- 若 f È分•在, 则 $'$ 满足可列可加5.
- ½Â 4.1.1. 若 $' : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足可列可加5且 $'(\emptyset) = 0$, 则 ¡ $'$ •符Ò测Ý. 若 $|'(A)| < \infty, \forall A \in \mathscr{F}$, 则 ¡ $'$ 有限 . 若 $\exists X$ y分 $\{A_n\}$ $|'(A_n)| < \infty, \forall n$, 则 ¡ $'$ 有限 .
- 注: $'$ 具有可加5.

命题 (命题4.1.1)

二择一:

$$\text{或者} \quad '(A) < \infty; \quad \forall A \in \mathscr{F};$$

$$\text{或者} \quad '(A) > -\infty; \quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- 反　法: 若$\exists A; B$　　$'(A) = \infty$, $'(B) = -\infty$. 则

$$A \cup B = A + B \backslash A \Rightarrow \ '(A \cup B) = \infty:$$

$$\text{同理}, A \cup B = B + A \backslash B \Rightarrow \ '(A \cup B) = -\infty:$$

矛 ñ !

- 注: 约 ½　$'(A) > -\infty$, $\forall A \in \mathscr{F}$.
- 注: ± 下总假　'　符 Ò 测 Ý ,　有集 Ü 均$\in \mathscr{F}$.

命题 (命题4.1.2)

若$A \supseteq B$ 且$|'(A)| < \infty$, 则$|'(B)| < \infty$.

- $A = B + A \backslash B$.
- 若$'(B) = \infty$, 则$'(A) = \infty$.
  若$'(B) = -\infty$, 则$'(A) = -\infty$.

命题 (命题4.1.3)

若$A_1; A_2; \cdots$ 两两不交且$\left| ' \left(\sum_{n\ \ 1}^{8} A_n\right)\right| < \infty$, 则

$$\sum_{n\ \ 1}^{8} |\,'(A_n)| < \infty:$$

- 令$I = \{n : \ '(A_n) > 0\}$, $J = \{n : \ '(A_n) < 0\}$;

$$B = \sum_{n \mathrm{P} I} A_n; \quad C = \sum_{n \mathrm{P} J} A_n:$$

- $B; C \subseteq A$, $\quad 0 \leqslant |\,'(B)|; |\,'(C)| < \infty$.
- $\sum_{n \mathrm{P} I} |\,'(A_n)| = \ '(B)$, $\quad \sum_{n \mathrm{P} J} |\,'(A_n)| = |\,'(C)|$.
- 注: 若$\ '\left(\sum_{n\ \ 1}^{8} A_n\right) = \infty$, 则$\ '(B) = \infty$, $-\infty < \ '(C) \leqslant 0$.

x4.2 Hahn 分解 Ú Jordan 分解

- ' 符Ò测Ý, 有集Ü均$\in \mathscr{F}$.
- 例, $'(A) = \int_A f\,\mathrm{d}$.

$$'(A) = \int_{A\mathrm{X}\mathrm{t}f\text{¡}0\mathrm{u}} f\,\mathrm{d} + \int_{A\mathrm{X}\mathrm{t}f\ 0\mathrm{u}} f\,\mathrm{d} = \int_A f\ \ \mathrm{d} - \int_A f\ \ \mathrm{d}\ :$$

- 若X 分割$\{X\ \ ; X\ \ \}$满足:

$$'(A) \geqslant 0;\ \forall A \subseteq X\ \ ;\qquad '(A) \leqslant 0;\ \forall A \subseteq X\ \ ;$$

则¡$\{X\ \ ; X\ \ \}$ • ' Hahn 分解.

- 若' ; ' 测Ý且

$$' = '\ \ - '\ \ ,$$

则¡该 • ' Jordan 分解.

- 注: 若 ; • 测Ý, 则 $\pm$: $A \mapsto$ $(A) \pm$ (A).

Ú 理 (Ú 理4.2.1)

若 '$(A) < \infty$, 则$\forall$" > 0, $\exists A_\varepsilon \subseteq A$ 使得

'$(A_\varepsilon) \geqslant 0$ 且 ' $(A \backslash A_\varepsilon) \leqslant$ ":

- 反 法: 若$\exists$"$_0 > 0$
  - : $\forall A_0 \subseteq A$; ½者 '$(A_0) < 0$ ½者 ' $(A \backslash A_0) >$ "$_0$:
- 取$A_0 = \varnothing$, 则 ' $(A) >$ "$_0$.
- 于 $\exists B_1 \subseteq A$ '$(B_1) >$ "$_0$, 由• ' $(A - B_1) >$ "$_0$.
- 于 $\exists B_2 \subseteq A - B_1 \subseteq A$ '$(B_2) >$ "$_0$.
- '$(B_1 + B_2) > 0$, 由• ' $(A - (B_1 + B_2)) >$ "$_0$ ······
- 令$B = \sum_{n}^{8}\ _1 B_n$, 则 '$(B) = \sum_{n}^{8}\ _1$ '$(B_n) = \infty \Rightarrow$ '$(A) = \infty$.

Ú 理 (Ú 理4.2.2)

设 $'(A) < 0$, 则$\exists A_0 \subseteq A$ 使得

$$'(A_0) < 0 \text{ 且 } ' \ (A_0) = 0:$$

- 由Ú 理4.2.1, $\exists C_1 \subseteq A$ $\quad '(C_1) \geqslant 0$ 且 $' \ (A \backslash C_1) \leqslant {''}_1 := 1$.
- 令$A_1 := A - C_1$, 则 $'(A_1) < 0$, $' \ (A_1) \leqslant {''}_1 = 1$.
- $\star\star$, $A_1 = A_2 + C_2$, $'(C_2) \geqslant 0$ 且 $' \ (A_2) \leqslant {''}_2 := \frac{1}{2}$. $\cdots$
- 令$C := \sum_{n \quad 1}^{8} C_n$. $A_0 = A - C =\downarrow \lim\limits_{n \, \text{N} \, 8} A_n$.
- $'(A_0) < 0:$

$$'(A) < 0; \qquad '(C) = \sum_{n \quad 1}^{8} '(C_n) \geqslant 0:$$

- $' \ (A_0) = 0:$

$$0 \leqslant ' \ (A_0) \leqslant ' \ (A_n) \leqslant {''}_n = \frac{1}{n} \to 0:$$

½ 理 (½ 理4.2.3, Hahn 分解)

Hahn分解存在惟一:

$$' (A) = 0; \ \forall A \subseteq X_1 \quad X_2 = X_1 \quad X_2 = X_1 \ X_2 + X_1 \ X_2 :$$

- (1) $\mathscr{F} := \{A : ' (A) = 0\}$, .
- (1.a) $\mathscr{F}$ 非空: $\varnothing \in \mathscr{F}$;
- (1.b) 若$A_1; A_2 \in \mathscr{F}$, 则$A_1 \backslash A_2 \in \mathscr{F}$:

$$0 \leqslant ' (A_1 \backslash A_2) \leqslant ' (A_1) = 0:$$

- (1.c) 若$A_1; A_2; \cdots \in \mathscr{F}$ 两两不交, 则$\sum_{n \ 1}^{8} A_n \in \mathscr{F}$:

$$' (B) = \sum_{n \ 1}^{8} ' (B \cap A_n) \leqslant 0; \quad \forall B \subseteq \sum_{n \ 1}^{8} A_n:$$

- (2) Hahn 分解 • 在: $\exists X$

$$X \quad + X \quad = X; \quad '(AX \quad) \geqslant 0 \geqslant '(AX \quad); \ \forall A:$$

- 不妨 (约 ½) $'(A) > -\infty, \forall A$.

  记 $:= \inf\{ '(A) : A \in \mathscr{F} \quad \}$. $\varnothing \in \mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad \leqslant 0$.

- 取$\{A_n\} \in \mathscr{F}$ $'(A_n) \to$. 则$X \quad := \bigcup_{n \quad 1}^{8} A_n \in \mathscr{F}$.

- $= '(X \quad) > -\infty$: $X \quad \backslash A_n \in \mathscr{F}$,

$$'(X \quad) = '(A_n) + '(X \quad \backslash A_n)$$

$$\leqslant '(A_n) + ' \quad (X \quad \backslash A_n) = '(A_n) \to \quad :$$

- $\forall A$, $'(AX \quad) \leqslant ' \quad (AX \quad) \leqslant ' \quad (X \quad) = 0$.

- 令$X \quad = X - X$. $'(AX \quad) \geqslant 0, \forall A$.

- 令 $X \quad = X - X \quad .$ $\quad '(AX \quad) \geqslant 0, \forall A.$
  反 法: 假 $\exists A \subseteq X \quad '(A) < 0.$
- $\exists A_0 \subseteq A \quad '(A_0) < 0,$ 且 $' \quad (A_0) = 0$, i.e. $A_0 \in \mathscr{F} \quad .$
- $A_0 + X \quad \in \mathscr{F} \quad ,$ 且

$$'(A_0 + X \quad) = \ '(A_0) + \ '(X \quad) < \quad :$$

与 ½ Â 矛 ñ !

- (3) Ž ˜ 5. X_1 与X_2 Ñ Hahn 分解.
- $A \subseteq X_1 \quad X_2 = X_1 \cap X_2 + X_2 \cap X_1$.
- $A_1 = A \cap \star$, 则

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \subseteq X_1 \Rightarrow {}'(A_1) \geqslant 0 \\ A_1 \subseteq X_2 \Rightarrow {}'(A_1) \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow {}'(A_1) = 0:$$

- 同理, $'(A \cap \star) =.$ l 而

$$'(A) = {}'(A \cap \star) + {}'(A \cap \star) = 0:$$

½ 理 (½ 理4.2.4, Jordan 分解)

Jordan分解存在惟一:

$$' = ' - ' ; \quad 且 \ ' = ' ; \ ' = (-') :$$

- ' Ñ 测 Ý , 且不妨 (约 ½) ' 有限:

$$' (A) = '(A \cap X); \quad ' (A) := -'(A \cap X):$$

- $'(A) = '(A \cap X) + '(A \cap X) = ' (A) - ' (A).$
- $' \leqslant ' : \forall B \subseteq A, '(B) \leqslant ' (B) \leqslant ' (A).$
- $' \leqslant ' : A \cap X \subseteq A.$
- $(-') \leqslant ' : \forall B \subseteq A, -'(B) \leqslant ' (B) \leqslant ' (A).$
  $' \leqslant (-') : A \cap X \subseteq A.$

- 注: $' = \quad - \quad$ 分解不Ž ˜, 例: $\quad = ' \quad + \quad, \quad = ' \quad + \quad.$
- 注: $'$ 不交. 若 $\neq 0$ 则 $' \quad +$ 相交:
- $'$ 上变 : $'$; 下变 : $'$.
- $'$ 全变 : $|'| := ' \quad + '$.
- Ú 理 : $|'|(A) = 0$ i $'(B) = 0, \forall B \subseteq A$.
- $\Rightarrow$:

$$|'|(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} ' \quad (A) = 0 \\ |'|(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow ' \quad (B) = 0 \Rightarrow '(B) = 0.$$

- $\Leftarrow$: 记 $'$ Hahn 分解 • X , 则

$$'(X \quad \cap A) = 0 \Rightarrow ' \quad (A) = 0 \Rightarrow |'|(A) = 0.$$

- 注: $|'(A)| \leqslant |'|(A)$. 仅 $|'|(A) = 0$, A 才可 ± 被 略.

- ½ Â 4.3.2. 若$\forall A \in \mathscr{F}$,

$$(A) = 0 \Rightarrow {}'(A) = 0;$$

则 ¡ ' é 绝 é 连 Y , 记作 $' \ll$.

- 注: $' \ll$ i $'$ $\ll$ i $|'| \ll$ ..

$$(A) = 0 \Rightarrow (A \cap X) \Rightarrow {}' (A) = {}'(A \cap X) = 0:$$

: 若 有限 且 ' ≪ , 则$\frac{d\varphi}{d\mu}$ • 在.

命题4:3:2 命题4:3:3 命题4:3:4 ½ 理4:3:5

' 有限 → ' 有限 → ' 任 ¿

有限 → 有限:

Ú 理 (Ú 理4.3.1)

设 ';   都是   限测度. 则

$$\exists f \in \mathscr{L} := \left\{ g \in L_1 : g \geqslant 0; \int_A g\mathrm{d} \quad \leqslant \; '(A); \; \forall A \right\}$$

使得 $$\int_X f\mathrm{d} \quad = \quad := \sup \left\{ \int_X g\mathrm{d} \quad : g \in \mathscr{L} \right\}:$$

- 注: Ï • ' 有限, ± $\leqslant \; '(X) < \infty$.
- 取$g_1; g_2; \cdots \in \mathscr{L}$ $\int_X g_k \mathrm{d} \quad \to \quad$. 令

$$f_n := \max_{1 ¤ k ¤ n} g_k:$$

- $f_n \uparrow f := \sup\limits_{k \geq 1} g_k$, 则

$$\int_X f \,\mathrm{d} = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d} \geqslant \lim_{n \to \infty} \int_X g_n \,\mathrm{d} = .$$

- $B_{n,1} = \{f_n = g_1\}$,

$$B_{n,k} = \{f_n = g_k > \max\{g_1, \cdots, g_{k-1}\}\} = \{f_n = g_k\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \{f_n = g_i\}.$$

- $f \in \mathscr{L}$: $f \geqslant 0$, 且

$$\int_A f \,\mathrm{d} \leftarrow \int_A f_n \,\mathrm{d} = \sum_{k=1}^{n} \int_{A \cap B_{n,k}} f_n \,\mathrm{d} = \sum_{k=1}^{n} \int_{A \cap B_{n,k}} g_k \,\mathrm{d}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(A \cap B_{n,k}) = \varphi(A).$$

命题 (命题4.3.2)

设 $';$ 都是 限测度. 若 $' \ll$, 则 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 存在, 且 $\in L_1$.

- $f \in \mathscr{L} \Rightarrow$ 测 Ý. $\equiv 0$.

$$(A) := '(A) - \int_A f\,\mathrm{d} \;; \quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- $_n$ (↑)符 Ò 测 Ý.

$$_n(A) := (A) - \frac{1}{n}(A); \quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- 记 $_n$ Hahn 分解 • X_n. $(X\ ) = 0$, 其

$$X = \bigcup_{n\ 1}^{8} X_n; \quad X = \bigcap_{n\ 1}^{8} X_n:$$

- $(X\ ) = 0$: $X \subseteq X_n$,

$$0 \leqslant (X\ ) = {}_n(X\ ) + \frac{1}{n}(X\ ) \leqslant \frac{1}{n}(X\ ) \to 0:$$

- $f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+} \in \mathscr{L}$:

$$\int_A \left(f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+}\right) \mathrm{d} \quad = {'}(A) - \ (A) + \frac{1}{n} \ (X_n \ \cap A)$$
$$\leqslant {'}(A) - \ (X_n \ \cap A) + \frac{1}{n} \ (X_n \ \cap A)$$
$$= {'}(A) - \ {}_n(X_n \ \cap A) \leqslant \ {'}(A):$$

- $(X \quad) = 0$:

$$\int_X \left(f + \frac{1}{n}\mathbf{I}_{X_n^+}\right) \mathrm{d} \quad \leqslant \quad = \int_X f \mathrm{d} \quad \Rightarrow \quad (X_n \ ) = 0; \forall n:$$

- $' \ll \quad \Rightarrow {'}(X \quad) = 0, \qquad (X \quad) = 0.$
- $\int_X |f| \mathrm{d} \quad = \int_X f \mathrm{d} \quad = {'}(X) < \infty, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \in L_1.$

命题 (命题4.3.3)

设 ' 是 限的符号测度, 是 限测度. 若 ' $\ll$, 则 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 存在, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 是 -a.e. 限的, 且积分存在.

- ' 有限. 则 ' 均•有限测Ý, 且 ' $\ll$. 于 $\frac{\mathrm{d}\varphi^{\pm}}{\mathrm{d}\mu}$ •在.
- $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\varphi^{+}}{\mathrm{d}\mu} - \frac{\mathrm{d}\varphi^{-}}{\mathrm{d}\mu}$:

$$'(A) = '\ (A) - '\ (A) = \int_A \frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}}\mathrm{d} - \int_A \frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}}\mathrm{d} :$$

- 假 命题¤立. 记 ' Hahn 分解X , 则

$$\frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}}\Big|_{X^-} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}}\Big|_{X^+} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}}\right) = \frac{\mathrm{d}\,'}{\mathrm{d}} :$$

- $'$ 有限 . $X = \sum_{n \ 1}^{8} A_n$ 且$|'(A_n)| < \infty$, $\forall n \geqslant 1$.
- 在$(A_n; A_n \cap \mathscr{F})$ 上, R-N f_n • 在且a.e. 有限.

$$f_n := \frac{d' |_{A_n X \mathscr{F}}}{d \ |_{A_n X \mathscr{F}}}; \quad 即 \ '(A) = \int_A f_n d \ ; \ \forall A \subseteq A_n:$$

- 令$f = \sum_{n \ 1}^{8} f_n \mathbf{I}_{A_n}$, 则$f$ a.e. 有限.

$$'(A \cap A_n) = \int_{A X A_n} f_n d \ = \int_{A X A_n} f d \ ; \quad \forall A:$$

- f È 分 • 在: 不妨 $'$ 有限, 取$A = \{f < 0\}$, 则

$$'(\{f < 0\} \cap A_n) = -\int_{A_n} f \ d \ \Rightarrow \int_X f \ d \ = -'(f < 0) < \infty:$$

- $'(A) = \sum_{n \ 1}^{8} '(A \cap A_n) = \sum_{n \ 1}^{8} \int_{A X A_n} f d \ = \int_A f d \ .$

命题 (命题4.3.4)

设 ' 是符号测度, 是 限测度. 若 ' ≪ , 则 $\frac{d\varphi}{d\mu}$ 及其积分存在.

若 ' 是 限的, 则 f 是 -a.e. 限的.

- (1) $\mathscr{G}$, .

$$\mathscr{G} := \left\{ \sum_{n \quad 1}^{8} A_n : |\,'(A_n)| < \infty; n = 1; 2; \cdots \right\}:$$

- $\varnothing \in \mathscr{G}$; 不交并封闭; 封闭:

$$\sum_{n \quad 1}^{8} A_n \setminus \sum_{n \quad 1}^{8} B_n = \sum_{n \quad 1}^{8} (A_n \setminus B)$$

其 , $A_n \setminus B \subseteq A_n$ $|\,'(A_n \setminus B)| < \infty$.

- (2) $\exists B \in \mathscr{G}$ $(B) =$ $:= \sup\{ (A) : A \in \mathscr{G}\}$.

  取 $B_n \in \mathscr{G}$; $(B_n) \to$ $\in [0; \infty)$; $B = \bigcup_{n \quad 1}^{8} B_n \in \mathscr{G}$ 即可:

- (3) 在$(B; B \cap \mathscr{F})$ 上, ' 有限 , 有限.

  R-N $g = \frac{\mathrm{d}\varphi|_{B \cap \mathscr{F}}}{\mathrm{d}\mu|_{B \cap \mathscr{F}}}$ • 在, -a.e. 有限 , :

  $$'(C) = \int_C g\mathrm{d} \ ; \ \forall C \subseteq B: \quad 不妨 \quad (按约 ½) \int_B g \ \mathrm{d} \ < \infty:$$

- (4) 在$(B^c; B^c \cap \mathscr{F})$ 上, $\forall C \subseteq B^c$,

  $$(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad '(C) = 0; \qquad (' \ll \ )$$

  $$(C) > 0 \quad \Rightarrow \quad '(C) = \infty: \quad (否则 \ B + C \in \mathscr{G} \ 与 \ \star\&\ast \ 矛 ñ \ )$$

  于 , $'(C) = \int_C \infty \mathrm{d} \ , \forall C \subseteq B^c$.

- (5) 令$f = g\mathbf{I}_B + \infty\mathbf{I}_{B^c}$, 则$f$ È 分 • 在:

$$\int_X f \, d = \int_B g \, d < \infty:$$

- $\forall A$,

$$'(A) = '(A \cap B) + '(A \cap B^c) = \int_{A X B} g d + \int_{A X B^c} \infty d$$

$$= \int_{A X B} f d + \int_{A X B^c} f d = \int_A f d :$$

- ' 有限 , $X \in \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{G} = \mathscr{F} \Rightarrow$ 可取$B = X$,

$$f \overset{\text{a.e.}}{=} g; \quad \text{a:e:有限:}$$

½ 理 (½ 理4.3.5)

设 ' 是符号测度, 是 限的测度. 若 ' $\ll$, 则 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$ 及其积分存在. 若 ' 是 限的, 则 f 是 -a.e. 限的.

- 取$\{A_n\}$ $X = \sum_{n}^{8}{}_{1} A_n$ 且 $(A_n) < \infty$, $\forall n$.
- 在$(A_n; A_n \cap \mathscr{F})$ 上, R-N $f_n := \frac{\mathrm{d}\varphi|_{A_n \cap \mathscr{F}}}{\mathrm{d}\mu|_{A_n \cap \mathscr{F}}}$ • 在:

$$'(A) = \int_A f_n \mathrm{d} \ ; \ \forall A \subseteq A_n:$$

- 不妨 (按约 ½) $'(A) > -\infty$, $\forall A$.

$$\int_A f_n \mathrm{d} \ < \infty; \quad \forall n:$$

- 令$f = \sum_{n}^{8} {}_1 f_n \mathbf{I}_{A_n}$. 则$f$ È 分 • 在:

$$\int_X f \; d = \sum_{n \; 1}^{8} \int_{A_n} f \; d = -\sum_{n \; 1}^{8} \int_{A_n X t f \; 0u} f d$$
$$= -\sum_{n \; 1}^{8} \int_{A_n X t f \; 0u} f_n d = -\sum_{n \; 1}^{8} {}'(A_n \cap \{f < 0\})$$
$$= -{}'(f < 0) < \infty: \quad (\text{由不妨} \quad / \text{约 ½})$$

- $\forall A$,

$$'(A) = \sum_{n \; 1}^{8} {}'(A \cap A_n) = \sum_{n \; 1}^{8} \int_{A X A_n} f d = \int_A f d \; :$$

- ' 有限 , 在A_n f_n -a.e. 有限 , f -a.e. 有限 .

例1(不 有限). $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : A$ ½ A^c õ 可 $\}$.

- 令
$$(A) = \begin{cases} \#(A); & \#(A) < \infty; \\ \infty; & \#(A) = \infty: \end{cases}$$
则 不 有限 !
- 令
$$'(A) = \begin{cases} 0; & 若 A \quad õ 可 \quad; \\ 1; & 若 A^c \quad õ 可 \quad : \end{cases}$$
- ' « :
$$(A) = 0 \Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow {}'(A) = 0:$$
- $f = \frac{d\varphi}{d\mu}$ 不 • 在. 否则

$$0 = {}'(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d \quad = f(x) \cdot \quad (\{x\}) = f(x); \ \forall x \Rightarrow f \equiv 0:$$

x4.4 Lebesgue 分解

- $(X;\mathscr{F})$ 可测空间, $'$; Ñ 符 ò 测 Ý.
  ± 下 件、¼ 均可测.
- 若 $' \ll | \ | =$ $+$, 则 ¡ $'$ é 绝 é 连 Y, 记作 $' \ll$.
- 注: $' \ll$ i $|'| \ll | \ |$.
- : $\Rightarrow$: $' \ll | \ | \Rightarrow |'| \ll | \ |$, ✓.
  $\Leftarrow$: $| \ |(A) = 0 \Rightarrow |'|(A) = 0 \Rightarrow |'(A)| \leqslant 0$.

- ½ Â 4.4.1. 若$\exists N \in \mathscr{F}$

$$|\,'|(N^c) = |\quad|(N) = 0;$$

则 ¡ ′ 与 相 p 奇 É, 记 • ′⊥ .

- Ú 理4.4.1. ′⊥ 且仅 $\exists N \in \mathscr{F}$

$$'(A \cap N^c) = \quad (A \cap N) = 0; \quad \forall A:$$

- ： 由x4.2 "Ú 理 ： $|\,'|(A) = 0$ i $'(B) = 0, \forall B \subseteq A$", ✓.
- Ú 理4.4.2. 若 ′ ≪ 且 ′⊥ , 则 $' \equiv 0$.
- ： 取$N \in \mathscr{F}$ ⋆⋆. 于 , $|\,'|(N) = 0$. $|\,'|(X) = 0$.

- Lebesgue 分解: ′, Ñ 有限 符 Ò 测 Ý, 则 • 在(Ž ˜ ˜ 组) 有限 符 Ò 测 Ý $'_c$, $'_s$

$$' = '_c + '_s; \quad '_c \ll \quad ; \quad '_s \perp \quad :$$

- Ž ˜ 5 明: é 任 ¿ 满足| $|(N) = |'_s|(N^c) = 0$ N,

$$'_c(A) = '_c(AN) + '_c(AN^c) = '_c(AN^c) = '(AN^c); \quad '_s(A) = '(AN):$$

若有两 分解, 取$N = N_1 \cup N_2$ 即可.

- 明 S:

命题4:4:3		命题4:4:4		½ 理4:4:5		推论4:4:6
′ : f.m.	→	f.m.	→	f.s.m.		
: f.m.	→	f.m.			→	f.s.m.:

命题 (命题4.4.3)

设 $';$ 都是 限的测度, 则存在 限测度 $'_c; '_s$ 使得:

$$' = '_c + '_s; \quad '_c \ll \ ; \quad '_s \perp \ :$$

- $' \ll ' +$, $f := \frac{d\varphi}{dp\varphi \quad \mu q}$ • 在, 且 $0 \leqslant f \leqslant 1$, (-a.e.):

$$0 \leqslant \int_A f \, d(' + \ ) = '(A) \leqslant (' + \ )(A) = \int_A 1 \, d(' + \ ); \ \forall A:$$

- ★★: 令 $N = \{f = 1\}$,

$$'_c(A) := '(A \cap N^c); \quad '_s(A) := '(A \cap N):$$

- 注: $'_s$ 由 N , $'_c$ (: 与) 由 $N^c = \{0 \leqslant f < 1\}$.

- $N = \{f = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mathfrak{p}\varphi \quad \mu\mathfrak{q}} = 1\}$, $N^c = \{0 \leqslant f < 1\}$,

$$'_c(A) := '(A \cap N^c); \quad '_s(A) := '(A \cap N):$$

- $'_s \perp \quad : \; '_s(N^c) = 0$; 且 $\quad (N) = 0$:

$$'(N) = \int_N f \mathrm{d}(' + \quad) = \int_N 1 \mathrm{d}(' + \quad) = '(N) + \quad (N):$$

- $'_c \ll \quad$: 若 $\quad (A) = 0$, 则

$$\int_{AN^c} (1 - f) \mathrm{d}(' + \quad) = \quad (AN^c) = 0 \Rightarrow '_c(A) \leqslant (' + \quad)(AN^c) = 0:$$

命题 (命题4.4.4)

设 $'$; 都是 限的测度, 则存在 限的测度 $'_c; '_s$ 使得:

$$' = '_c + '_s; \quad '_c \ll \; ; \quad '_s \perp \; .$$

½ 理 (½ 理4.4.5, Lebesgue 分解)

设 $'$ 是 限的符号测度, 是 限的测度.

则存在惟一的一对 限的符号测度 $'_c; '_s$ 使得$\star$.

推论 (推论4.4.6)

设 $'$; 都是 限的符号测度, 则存在惟一的一对 限的符号测度 $'_c; '_s$ 使得$\star$.

例. 分布与 Å变量 分布.

- $(\mathbb{R}; \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上 概率分布, Lebesgue 测Ý.
- 若 $\ll$, 则 ¡ • 连Y . , ¡ $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ • (概率分布)密Ý.
- 若 $(\{x\}) > 0$, 则 ¡ x • 原子. 有限$\Rightarrow$ D 可 ,

$$D = D_\mu := \{x \in \mathbb{R} : (\{x\}) > 0\}; \quad 记\ D = \{x_n; n \geqslant 1\}.$$

- 若 $(D) = 1$, 则 ¡ • 离散 . , 记$p_n = (\{x_n\}), \forall n$.
  ¡ $\{(x_n; p_n); n \geqslant 1\}$ • (概率)分布列.
- 若 $\perp$ 且 $(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, 则 ¡ • 奇É . .

- 有限测Ý, 有限 测Ý.
- ' 于 Lebesgue 分解:

$$= {}_c + {}_s; \quad {}_1 := {}_c \ll \;; \quad {}_s \perp \;.$$

- 有原子组¤可 集D. 令

$${}_2(A) := {}_s(A \cap D); \quad {}_3 := {}_s - {}_2.$$

- 令 $_i := \ _i(\mathbb{R})$, $i = 1;2;3$. 则

$$_1;\ \ _2;\ \ _3 \geqslant 0; \qquad _1 + \ _2 + \ _3 = 1:$$

- 若 $_i = 1$, 则 $=\ _i$. d •连Y . /离散 . /奇É . .
- 若 $_i > 0$, 则可将 $_i$ 8 ˜ z •分布, $\tilde{}_i := \frac{1}{\alpha_i}\ _i$.
- 若 $_i = 0$, 则任取 ˜ 个同类 . 分布作 • $\tilde{}_i$.
- •在 $_1;\ _2;\ _3$, 连Y . 分布$\tilde{}_1$, 离散 . 分布$\tilde{}_2$, 奇É . 分布$\tilde{}_3$: ⋆⋆ 且

$$= \ _1\tilde{}_1 + \ _2\tilde{}_2 + \ _3\tilde{}_3:$$

- $(X;\mathscr{F};P)$ • 概率空间, • Å 变量.
- 分布: $= {}_{\xi} = P \circ {}^{1}$.
- 若 $_{1} = 1$, 则 $_{\xi}$ • 连Y ., d ¡ • 连Y . r.v.,

  ¡ $_{\xi}$ 密Ý $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ • (概率分布)密Ý .
- 若 $_{2} = 1$, 则 $_{\xi}$ • 离散 ., d ¡ • 离散 . r.v.,

  ¡ $_{\xi}$ 分布列 • 分布列.
- 若 $_{3} = 1$, 则 $_{\xi}$ • 奇É ., d ¡ • 奇É . r.v..

- 连Y . r.v. ¼ 期 " :

  : $(X;\mathscr{F};P) \to (\mathbb{R};\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, $g:(\mathbb{R};\mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \hookleftarrow$, 则

$$\mathrm{E}g(\ ) = \int_X g \circ \ \mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\ _{\xi} = \int_{\mathbb{R}} g \frac{\mathrm{d}\ _{\xi}}{\mathrm{d}}\mathrm{d}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g \cdot p_{\xi}\mathrm{d}\ = \int_{8}^{8} g(x)p_{\xi}(x)\mathrm{d}x:$$

x4.5 条件期" Ú条件概率

- (;$\mathscr{F}$;P) 概率空间.
- $\mathscr{G}$ $\mathscr{F}$ 子 " :

$$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$$ 且$\mathscr{G}$ " :

- ± 下, 件、¼ Ñ ' 于$\mathscr{F}$ 可测, 集 Ü 系 Ñ $\mathscr{F}$ 子 " .

- ½ Â 4.5.1. 假 f È 分 • 在. ¡ 满足下列(1), (2) f • f ' 于$\mathscr{G}$ 条件期 ", 记 • $E(f|\mathscr{G})$.

  (1) f^* ($;\mathscr{G};P$) 上 È 分 • 在 可测 ¼ ;

  (2) $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$Ef^*\mathbf{I}_A = Ef\mathbf{I}_A; \quad 即 \int_A f^* dP = \int_A f dP:$$

- 注: $E(f|\mathscr{G})$ • 在, ˜ 族在($;\mathscr{G};P$) a.s. 相 r.v..

- $\{A_t; t \in T\} \subseteq \mathscr{F}$. 若$\forall n \geqslant 2$, $\{t_1; \cdots; t_n\} \subseteq T$,

$$P\left(\bigcap_{k\ \ 1}^{n} A_{t_i}\right) = \prod_{k\ \ 1}^{n} P\left(A_{t_k}\right);$$

则 ¡ $\{A_t; t \in T\}$ 相 p õ 立.

- $\mathscr{E}_t \subseteq \mathscr{F}$, $\forall t \in T$. 若任取$A_t \in \mathscr{E}_t$, $t \in T$, 总有$\{A_t; t \in T\}$ 相 p õ 立, 则 ¡ $\{\mathscr{E}_t; t \in T\}$ 相 p õ 立.

- $\{f_t; t \in T\}$ Å 变量族. 若$\{\ (f_t); t \in T\}$ 相 p õ 立, 则 ¡ $\{f_t; t \in T\}$ 相 p õ 立.

- Ú 理4.5.1. f È 分 • 在 r.v.. 若f 与$\mathscr{E}$ 相 p õ 立(即, (f) 与$\mathscr{E}$ 相 p õ 立), 则

$$\mathrm{E}(f \mathbf{I}_A) = (\mathrm{E} f) \cdot P(A):$$

½ 理 (½ 理4.5.2)

设$f;g$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G};\mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子 代数.

(1) (可测性) 若$f \in \mathscr{G}$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $\mathrm{E}(a|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若f $\mathscr{G}$ 独立, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}f$.

Esp, 可取$\mathscr{G} = \{\varnothing; \quad\}$.

(3) (重条件期望公式) 若$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0$, 则

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G})|\mathscr{G}_0\right) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(f|\mathscr{G}_0)|\mathscr{G}\right):$$

(4) (单调性) 若$f \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} g$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \mathrm{E}(g|\mathscr{G})$. Esp, $g = |f|$.

(5) (线性) $\forall a;b \in \mathbb{R}$, 若$a\mathrm{E}f + b\mathrm{E}g$ 意义, 则

$$\mathrm{E}(af + bg|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) + b\mathrm{E}(g|\mathscr{G}):$$

½ 理 (½ 理4.5.2)

设 $f;g$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G};\mathscr{G}_0$ 是 $\mathscr{F}$ 的子　代数.

(1) (可测性) 若 $f \in \mathscr{G}$, 则 $\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} f$. Esp, $\mathrm{E}(a|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} a$.

(2) (独立性) 若 f　$\mathscr{G}$ 独立, 则 $\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E}f$. Esp, $\{\emptyset;\quad\}$.

- (1) 可测 5: ✓. f　$:= f \in \mathscr{G}$.
  强 N: a.s. 提及　零测集 $\in \mathscr{G}$.
- (2) õ 立 5: f　$:= \mathrm{E}f \in \mathscr{G}$, 且 $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E} f \mathbf{I}_A = (\mathrm{E} f) P(A) = \mathrm{E} f \quad \mathbf{I}_A:$$

- 特别 / , f 与 $\{\emptyset;\quad\}$ õ 立,

$$\mathrm{E}(f|\{\emptyset;\quad\}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathrm{E} f:$$

½理 (½理4.5.2)

设$f;g$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G};\mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子 代数.

(3) (重条件期望公式) 若$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0$, 则

$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f|\mathscr{G})|\mathscr{G}_0\right) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathsf{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f|\mathscr{G}_0)|\mathscr{G}\right):$$

- (3) 条件期" 公 : 记$f \ := \mathsf{E}(f|\mathscr{G})$, 则$f \ \in \mathscr{G}$.
- ˜ 方面,

$$\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_0 \Rightarrow f \ \in \mathscr{G}_0 \Rightarrow \mathsf{E}(f \ |\mathscr{G}_0) \overset{\text{a.s.}}{=} f \ ;$$

- 另˜ 方面, 记$\hat{f} := \mathsf{E}(f|\mathscr{G}_0)$, 则$\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathsf{E}f \ \mathbf{I}_A = \mathsf{E}f\mathbf{I}_A \overset{AP\mathscr{G}_0}{=} \mathsf{E}\hat{f}\mathbf{I}_A;$$

$$f \ = \mathsf{E}(\hat{f}|\mathscr{G}).$$

½ 理 (½ 理4.5.2)

设$f;g$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G};\mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子 代数.

(4) (单调性) 若$f \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} g$, 则$\mathrm{E}(f|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{\leqslant} \mathrm{E}(g|\mathscr{G})$. Esp, $g = |f|$.

- (4) ü N 5 : $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}f \;\; \mathbf{I}_A = \mathrm{E}f\mathbf{I}_A \leqslant \mathrm{E}g\mathbf{I}_A = \mathrm{E}g \;\; \mathbf{I}_A:$$

P 有限 (概率测 Ý), $f \leqslant g$ (在($;\mathscr{G};P$)) a.s..
(习题三、4)

½ 理 (½ 理4.5.2)

设$f;g$ 是积分存在的r.v., $\mathscr{G};\mathscr{G}_0$ 是$\mathscr{F}$ 的子 代数.

(5) (线性) $\forall a;b\in\mathbb{R}$, 若$aEf + bEg$ 意义, 则

$$E(af+bg|\mathscr{G}) \overset{\text{a.s.}}{=} aE(f|\mathscr{G})+bE(g|\mathscr{G}):$$

- (5) 线 5: 若★ 有 ¿ Â, 则$h = af + bg$ (a.s.有 ¿ Â 且) È 分 • 在, h := $E(af+bg|\mathscr{G})$ • 在.
- 记f := $E(f|\mathscr{G})$, g := $E(g|\mathscr{G})$, 则$aEf + bEg = aEf + bEg$ 有 ¿ Â, $\hat{h} := af + bg$ (a.s.有 ¿ Â 且) È 分 • 在.
- $\hat{h} = h$ a.s.: $\hat{h}\in\mathscr{G}$, 且$\forall A\in\mathscr{G}$,

$$E\hat{h}\mathbf{I}_A = aEf\ \mathbf{I}_A + bEg\ \mathbf{I}_A = aEf\mathbf{I}_A + bEg\mathbf{I}_A = Eh\mathbf{I}_A:$$

- 8 纳: $Ef + Eg + Eh$ 有 ¿ Â $\Rightarrow (f+g+h) \overset{\text{a.s.}}{=} f + g + h$.

- (1) ü N 敛½理: 若$0 \leqslant f_n \uparrow f$ a.s., 则

$$f_n := \mathrm{E}(f_n|\mathscr{G}) \in \mathscr{G},\ \text{非负且}\uparrow \text{ a.s..}$$

- 记$\hat{f} = \uparrow \lim_{n\,\text{Ñ}\,8} f_n$, 则$\hat{f} \in \mathscr{G}$.
- $\hat{f} = f \quad := \mathrm{E}(f|\mathscr{G})$: $\forall A \in \mathscr{G}$,

$$\mathrm{E}\hat{f}\mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n\,\text{Ñ}\,8} \mathrm{E}f_n\mathbf{I}_A = \uparrow \lim_{n\,\text{Ñ}\,8} \mathrm{E}f_n\mathbf{I}_A = \mathrm{E}f\mathbf{I}_A\text{:}$$

- (2) Fatou Ú理. 若$f_n \geqslant 0$ a.s., $\forall n$, 则

$$g_n := \inf_{m\,\text{¥}\,n} f_m \uparrow \liminf_{n\,\text{Ñ}\,8} f_n =: f \Rightarrow g_n \uparrow f \quad \text{:}$$

- $g_n \leqslant f_n \Rightarrow g_n \leqslant f_n \Rightarrow f \quad \leqslant \liminf_{n\,\text{Ñ}\,8} f_n$ a.s..
- (3) Lebesgue 控 敛, 略.

½ 理 (½ 理4.5.4, 条件期 " 线 5)

设 $f; g$ 是r.v., $f; fg$ 的积分存在, $g \in \mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. 则

$$\mathsf{E}(fg|\mathscr{G}) = g\mathsf{E}(f|\mathscr{G}) \ a.s.:$$

- $f; g \geqslant 0$. é g 用 ; . 方法.
- 记 $f = \mathsf{E}(f|\mathscr{G})$. $g = \mathbf{I}_A$, 其 $A \in \mathscr{G}$. ⋆⋆ ¤ 立: $\mathbf{I}_A f \in \mathscr{G}$,

$$\mathsf{E}\left((\mathbf{I}_A f) \times \mathbf{I}_B\right) = \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f|\mathscr{G})\mathbf{I}_{AB}\right)$$

$$\overset{AB\mathsf{P}\mathscr{G}}{=} \mathsf{E} f \mathbf{I}_{AB} = \mathsf{E}\left((f\mathbf{I}_A) \times \mathbf{I}_B\right); \quad \forall B \in \mathscr{G}:$$

- $g = \mathbf{I}_A \to g \geqslant 0$: 条件期 " 线 5、 ü N 敘 ½ 理.

- 去K $f;g \geqslant 0$ 假 . 按$f;g$ 符Ò y分 ,

$$_1 = \{f;g \geqslant 0\}; \qquad _2 = \{f;g < 0\}; \qquad _3; \quad _4:$$

- fg È分 • 在, $(fg)_i = fg\mathbf{I}_{\Omega_i}$ È分Ñ • 在且可Ú.
- 由条件期" 线5, $E(fg|\mathscr{G}) = \sum_i E((fg)_i|\mathscr{G})$.
- $E((fg)_i|\mathscr{G})$:

$$(fg)_1 = (f \quad g \quad) \quad = g \quad (f \quad) \ ;$$

$$(fg)_3 = (-f \quad g \quad) \quad = -(f \quad g \quad) \quad = -g \quad (f \quad) \ ;$$

$$\Rightarrow (fg) \quad = g \quad (f \quad) \quad + g \quad (f \quad) \quad - g \quad (f \quad) \quad - g \quad (f \quad) \quad = gf \quad :$$

- 假 ; • (;$\mathscr{F}$;P) 上 两个 Å 元.

  : (;$\mathscr{F}$;P) $\to$ (X;$\mathscr{F}_X$; $_\xi$), $\mathscr{G}$ = ( ) $\subseteq \mathscr{F}$.

  : (;$\mathscr{F}$;P) $\to$ (Y;$\mathscr{F}_Y$; $_\eta$).

- (= h( )) • Å 变量, 期 " • 在.

  记 = E(|) := E(|$\mathscr{G}$).

  则 $\in \mathscr{G}$. 由 ½ 理1.5.4, ∃ ' : (X;$\mathscr{F}_X$) $\to$ ($\mathbb{R}$;$\mathscr{B}_\mathbb{R}$)

$$= '( ); \quad P\text{-a.s.}:$$

- ½ Â 4.5.3. ¡ 满足⋆ '(·) • ' 于 给 ½ 条件期 " .

  记 • E(|

- ½ Â 4.5.4 若二元 ¼

$$_{x}(B) = \quad (x; B); \; x \in X; B \in \mathscr{F}_Y$$

满足:

(1) $\forall x \in X$, $_{x}$ $\mathscr{F}_Y$ 上 分布,

(2) $\forall B \in \mathscr{F}_Y$, $(\cdot; B) = P(\in B | = x)$, $_{\xi}$-a.s.. 即

$$\mathrm{E}\mathbf{I}_{\{\eta \in B\}}\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}} = \mathrm{E}\,(\;; B)\mathbf{I}_{\{\xi \in A\}};$$

则 ¡ • ' 于 给 ½ 则条件分布, 记 • $_{\eta|\xi}(\cdot;\cdot)$.

- 注: 概率论 记 • $_{\eta|\xi}(B|x)$.

- 假设 $:(\ ;\mathscr{F};P)\to(\mathbb{R};\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 是随机变量.
- 推论4.5.8. ' 于 给 ½ 则条件分布 $_{\eta|\xi}(\cdot;\cdot)$ • 在, 且条件期 " = é 则条件分布求期 ": ∀ Borel ¼ h,

$$E(h(\ )|\ =x)=\int_{\mathbb{R}} h(y)\ _{\eta|\xi}(x;dy)\quad _{\xi}\text{-}a{:}s{::}$$

- 简记 $_x(B):=\ _{\eta|\xi}(x;B),\ x\in X,\ B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
- ⋆⋆ 明: 令 $'(x):=$ RHS. 即 $'(\ )=E(h(\ )|\ )$. I :

$$(1)\ ':(X;\mathscr{F}_X)\to(\mathbb{R};\mathscr{B}_{\mathbb{R}});\quad (2)\ Eh(\ )\mathbf{I}_{t\xi PAu}=E\,'(\ )\mathbf{I}_{t\xi PAu}.$$

- ⋆⋆: 上 é $h=\mathbf{I}_B$ ¤ 立.
- ⋆⋆ ⇒ ⋆⋆, 即$\mathbf{I}_B\to$ 任 ¿ h, ; . 方法✓.

- 推论4.5.8. • 在 5 明:

目标: $_x(B) = \ _{\eta|\xi}(x;B), x \in X, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ • 在.

- 方法: 找 Ñ é 应 分布 ¼ $F_x(y) = \ _x((-\infty;y])$.

- ½ Â 4.5.2 . 若二元 ¼

$$F(x;y); \quad x \in X; \ y \in \mathbb{R}$$

满足

(1) $\forall x \in X$, $F(x;\cdot)$ 分布 ¼ ,

(2) $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(x;y) = P(\ \leqslant y| \ = x)$, $_\xi$-a.s.. 即

$$EI_{t\eta¤y u}I_{t\xi P Au} = EF(\ ;y)I_{t\xi P Au};$$

则 ¡ • ' 于 给 ½ 则条件分布 ¼ , $F_{\eta|\xi}(\cdot;\cdot)$.

½理（½理4.5.6 ）

关　　的给定值的正则条件分布函数$F_{\eta|\xi}(\cdot;\cdot)$ 存在.

- $F(x;\cdot)$　分布¼　，且$F(x;y) = P(\ \leqslant y|\ = x)$, $_\xi$-a.s..
- $\forall r \in \mathbb{Q}$, 取 $'_r : (X;\mathscr{F}_X) \to (\mathbb{R};\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$

$$'(x;r) := '_r(x) = P(\ \leqslant r|\ = x); \qquad _\xi\text{-a.s.}$$

$X \times \mathbb{Q}$ 上　¼　$'(\cdot;\cdot)$.

- £　分布¼　　三条5　：ü N、右连Y、5范.
- 令$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, 则$N \in \mathscr{F}_X$ 且 $_\xi(N) = 0$. 其　，

$$N_1 := \{x \in X : \exists\, r_1; r_2 \in \mathbb{Q}; r_1 \leqslant r_2 \qquad '(x;r_1) > '(x;r_2)\};$$

$$N_2 := \{x \in X : \exists r \in \mathbb{Q} \qquad \lim_{n\,\mathrm{N}\,8} '(x; r + \frac{1}{n}) \neq '(x;r)\};$$

$$N_3 := \{x \in X : \lim_{n\,\mathrm{N}\,8} '(x;n) \neq 1 \ ½ \lim_{n\,\mathrm{N}\,8} '(x;-n) \neq 0\}:$$

- ½ $x \notin N$. $'(x;\cdot):\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ 满足 ü N、右连 Y、 5 范.
- ½ $x \notin N$.

$$F_{f|\mathscr{G}}(x;y) := \inf\{\,'(x;r) : r \in \mathbb{Q}; r > y\}:$$

- $\forall x \in N$, $F_{f|\mathscr{G}}(x;y) := F(y)$, • 任取 ˜ 个分布 ¼ .
- (1) ½ $x \in X$. $F_{\eta|\xi}(x;\cdot)$ 分布 ¼ . ✓. (习题 、24)
- (2) ½ $y \in \mathbb{R}$. $F_{\eta|\xi}(x;y) = \lim\limits_{r \text{P} \mathbb{Q}, r \text{Ó} y} \,'(x;r)$, $\forall x \notin N$,

$$F_{\eta|\xi}(\cdot;y) \overset{\mu\text{ -a.s.}}{=} \lim_{r \text{P} \mathbb{Q}, r \text{Ó} y} \,'(\cdot;r) = \lim_{r \text{P} \mathbb{Q}, r \text{Ó} y} P(\ \leqslant r|\ )$$

$$= \lim_{r \text{P} \mathbb{Q}, r \text{Ó} y} \mathrm{E}(\mathbf{I}_{\text{t}\eta\text{¤}r\text{u}}|\ ) = \mathrm{E}(\mathbf{I}_{\text{t}\eta\text{¤}y\text{u}}|\ ) = P(\ \leqslant y|\ ):$$

- 注: 类 /, • Å 向量即可.