第 Ù！测度空 m

§2.1 测度的定义与性

- $\mathscr{E}$ 为 8 合系.
- 8 函 , $\mu, \nu, \tau \cdots$, :

$$\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty].$$

- 可列可 \ 性:

若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, 两两不 , 且 $\overset{8}{\underset{n\ \ 1}{\circ}} A_n \in \mathscr{E}$, K

$$\mu \overset{8}{\underset{n\ \ 1}{¸}} A_n = \overset{8}{\underset{n\ \ 1}{¸}} \mu(A_n).$$

- 定义2.1.1. $\varnothing \in \mathscr{E}$. 若

$$\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$$

满足可列可 \ 性, 且$\mu(\varnothing) = 0$, K 称μ 为$\mathscr{E}$ 上的测度.

- 若$\mu(A) < \infty, \forall A \in \mathscr{E}$, K 称$\mu$ 有限的;
- 若$\exists A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$ 两两不 , 得

$$X = \overset{8}{\underset{n\ \ 1}{¸}} A_n \quad 且 \quad \mu(A_n) < \infty, \ \forall n,$$

K 称μ σ 有限的.

- 有限可\性:

  若$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{E}$, 两两不 ，且 $\overset{\circ}{\underset{i\ \ 1}{n}} A_i\in\mathscr{E}$, K

$$\mu \overset{n}{\underset{i\ \ 1}{¸}} A_i = \overset{n}{\underset{i\ \ 1}{¸}} \mu(A_i),$$

  K称 8函 μ 有有限可\性.

- 可~性:

  若$A,B\in\mathscr{E}$ 且$A\subseteq B$, $B\backslash A\in\mathscr{E}$, $\mu(A)<\infty$, K

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A).$$

- 命题2.1.1. 测度 有有限可\性和可~性.
- 3 可列可\性 取$A_{n\ 1}=A_{n\ 2}=\cdots=\varnothing$. $B=A+B\backslash A$.

- 例1(counting measure). $\mu(A) = \#(A)$, $A \in \mathscr{T}_X$.
- 例2(点测度！ 布列). $(X, \mathscr{F})$ 为可测空m，

$$\delta_x(A) = \mathbf{I}_A(x), \quad A \in \mathscr{F}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}.$$

- 例4(长度). $\mathscr{E} = \mathscr{Q}_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$, $a \leqslant b$,

$$\mu((a, b]) = b - a.$$

命题 (命题2.1.2)

$X=\mathbb{R}$, $\mathscr{E}=\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$, $F:\mathbb{R}\leftarrow$ 降、右连Y. 则, μ 是$\mathscr{E}$ 上的ÿ度.

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),\ a<b;\quad \mu((a,b])=0,\ a\geqslant b.$$

- $\mu(\varnothing)=0$, ✓. 下面,

$$\text{b}\ \overset{8}{\underset{i\ \ 1}{¸}}(a_i,b_i]=(a,b],\ \text{往}\ \overset{8}{\underset{i\ \ 1}{¸}}\mu((a_i,b_i])=\mu((a,b]).$$

- ˚ / $\leqslant$ 0 : $\forall n$, $\overset{n}{i}\ {}_1(a_i,b_i]\subseteq(a,b]$; 不 $b_1<\cdots<b_n$. K

$$a\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<\cdots<a_n<b_n\leqslant a_{n\ \ 1}:=b.$$

- 于 ,

$$\overset{n}{\underset{i\ \ 1}{¸}}(F(b_i)-F(a_i))\leqslant F(b)-F(a).$$

- $/ \geqslant 0$: 先用归纳 验

$$\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \supseteq (a, b] \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu((a_i, b_i]) \geqslant \mu((a, b]).$$

- $n = 1$, ✓. $n \to n+1$: b $\bigcup_{i=1}^{n+1} (a_i, b_i] \supseteq (a, b]$.

不 $b_{n+1} = \max_i b_i$. 于 , $b_{n+1} \geqslant b$.

- 若$a_{n+1} \leqslant a$, K $(a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq (a, b]$, ✓.
- K, $(a, a_{n+1}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$. 由归纳 b ,

$$F(a_{n+1}) - F(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu((a_i, b_i]).$$

- l ,

$$F(b) - F(a) \leqslant F(b_{n+1}) - F(a_{n+1}) + F(a_{n+1}) - F(a)$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \mu((a_i, b_i]).$$

- $\forall\varepsilon > 0$, 取$\delta_i > 0$ 得

$$\tilde{b}_i := b_i + \delta_i \text{ 满足 } F(\tilde{b}_i) - F(b_i) \leqslant \varepsilon/2^i.$$

- $\forall\delta > 0$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, \tilde{b}_i) \supseteq [a+\delta, b]$, 因 d • 3 有限开 .
- 于 , $\exists n$ 得

$$\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, \tilde{b}_i] \supseteq (a+\delta, b].$$

- 于 ,

$$F(b)-F(a+\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} F(\tilde{b}_i) - F(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i))+\varepsilon.$$

- 令$\varepsilon, \delta \to 0$ = 可.

- 测度空m：$(X, \mathscr{F}, \mu)$.

  X:　空8合;　$\mathscr{F}$: X 上的σ "　;　μ: $\mathscr{F}$ 上的测度.

- 零测8：$N \in \mathscr{F}$, $\mu(N) = 0$.

- 率(测度)空m $(X, \mathscr{F}, P)$: $P(X) = 1$.

  率(测度): P;　‡: $A \in \mathscr{F}$;　A (　)的　率: $P(A)$.

- 例5(离散型测度！　布列). X 可列,

$$p : X \to [0, \infty], \quad \mu(A) := \sum_{x \in A} p_x, \ \forall A \in \mathscr{T}_X.$$

- ü 调性: $A, B \in \mathscr{E}$, 且 $A \subseteq B$, K $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
- Œ 可列可 \ 性/ g„ 可列可 \ 性/ Œ σ 可 \ 性:

  $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- 下连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, K

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

- 上连续性: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, K

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

- 3 $\varnothing$? 连续: $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, $A_n \downarrow \varnothing \in \mathscr{E}$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, K

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

定理 (定理2.1.5)

半环上的ÿ度有单调5，可减5，半可列可加5，上、下连Y5．

- b μ 为Œ $\mathscr{Q}$ 上的8函 ．
- 命题2.1.3. 若μ ！有限可\，K有★，★．
- 命题2.1.4. 若μ ！可列可\，K有★，★．
- 命题2.1.3的 明：

$$A \subseteq B \Rightarrow B = A + \sum_{i=1}^{n} C_i \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i).$$

- 命题2.1.4的 明：$\varnothing = \sum_{i=1}^{\infty} \varnothing \Rightarrow \mu(\varnothing) = 0$ ∞.
- 若$\mu(\varnothing) = \infty$，K $A = A + \sum_{i=1}^{\infty} \varnothing$，故$\mu(A) = \infty$ ✓．
- 下 $\mu(\varnothing) = 0$. 于 ，μ 测度． (l ，有限可\．)

- μ 为测度, 往 μ 有下连续性和上连续性.
- 下连续性: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{Q}$, K

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathscr{Q}.$$

$$\Rightarrow A_N = \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{n,k}.$$

- 上连续性: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$, $\mu(A_1) < \infty$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{Q}$, K

$$B_n := A_{n-1} \setminus A_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad C_{n,k} \in \mathscr{Q}.$$

$$\Rightarrow A_N = A + \bigcup_{n>N} \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{n,k}, \quad \sum_{n>N} \sum_{k=1}^{k_n} \mu(C_{n,k}) \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

定理 (定理2.1.6)

μ 是环上的有限可加　负集函数. 则:

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5).$$

(1) μ 可列可加;

(2) μ 半可列可加;

(3) μ 下连Y;

(4) μ 上连Y;

(5) μ 在$\varnothing$ 处连Y.

§2.2 外测度

- 定义2.2.1. $\tau : \mathscr{T} \to [0,\infty]$, 满足

  (1) $\tau(\varnothing) = 0$;

  (2) 若$A \subseteq B \subseteq X$, K $\tau(A) \leqslant \tau(B)$;

  (3) $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathscr{T}$, 有

$$\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n).$$

  K 称τ 为X 上的外测度.

- τ 为 8 函 ！Œ可列可\！Œ有限可\.

定理 (定理2.2.1)

设μ 是集合系$\mathscr{E}$ 上的　负集函数, $\varnothing \in \mathscr{E}$ 且$\mu(\varnothing) = 0$. 令

$$\tau(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathscr{E}, n \geqslant 1; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A \right\}, \quad \forall A \in \mathscr{T}.$$

则τ是一个外ÿ度, 称为由μ 生成的外ÿ度.

- 注: $\inf \varnothing := \infty$.
- (1) $\tau(\varnothing) = 0$: 取$A = B_n = \varnothing$ 便　;
- (2) 若$A \subseteq B$, K $\tau(A) \leqslant \tau(B)$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq B \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A;$$

- (3) $\forall A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{T}$, 往 $\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$.
- 下 $\tau(A_n) < \infty$, $\forall n$. K. ✓.
- 取 $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n;k} \supseteq A_n$ 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n;k}) < \tau(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

- 于 ,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n;k} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n;k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n) + \varepsilon.$$

- τ 为外测度. 若A 满足如下Caratheodory 条‡:

$$\tau(D) = \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c), \quad \forall D \in \mathscr{T},$$

K 称A 称为τ 可测8 .

- $\mathscr{F}$ = 所有τ 可测8 .
- 定义2.2.2. b $(X, \mathscr{F}, \mu$ 测度Ç e

定理 (定理2.2.2, Caratheodory定理)

若τ 是外ÿ 度, 则$\mathscr{F}$ 是σ 代数, 且$(X,\mathscr{F},\tau)$ 是完 的ÿ 度空间.

往 $\mathscr{F}$ σ “ :

- (5) b $\{A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots\}$, K

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathscr{F}, \quad \text{两两不} \quad, \text{且} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n.$$

- (3) $\sim$ (4). 需验 :

若 $\{B_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \cdots\}$ 两两不 , K $\sum_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{F}$.

- 需验

$$\tau(D) \geqslant \tau\left(D \cap \star\right) + \tau\left(D \cap \star^c\right).$$

往 $\mathscr{F}$ σ “ (续):

- $\forall D \in \mathscr{T}$,

$$\tau(D) = \tau\left(D \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) + \tau\left(D \cap \star^c\right) =: I_1 + I_2.$$

- $I_2 \geqslant \tau\left(D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c\right)$.
- (3) I_1:

$$I_1 = \tau(D \cap B_1) + \tau\left(D \cap \bigcup_{i=2}^{n} B_i\right) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} \tau(D \cap B_i).$$

- (4) 故,

$$\tau(D) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) + \tau\left(D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c\right).$$

往 $\mathscr{F}$ σ “ (续):

- 一 面,

$$\tau(D) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) + \tau\left(D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c\right)$$

$$\geqslant \tau(D \cap \star) + \tau(D \cap \star^c).$$

- 另一 面,

$$\tau(D) \leqslant \tau(D \cap \star) + \tau(D \cap \star^c).$$

- 故, $\star \in \mathscr{F}$, 且

$$\tau\left(D \cap \star\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \cap B_i) \quad \forall D \in \mathscr{T}_X.$$

往 $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 测度:

- (6) b $\{B_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots\}$, 两两不 .
  ˚
- 取$D =$ 8 n 1 B_n, K一 面

$$\tau(D) \geqslant \overset{8}{\underset{i\ 1}{¸}} \tau(D \cap B_i) + \tau\ D\ £\ \overset{8}{\underset{i\ 1}{¸}} B_i^{\ c} = \overset{8}{\underset{i\ 1}{¸}} \tau(B_i).$$

- 另一 面,

$$\tau(D) \leqslant \overset{8}{\underset{i\ 1}{¸}} \tau(B_i).$$

往 $(X, \mathscr{F}, \tau)$ 完备:

- (7) $\tau(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{F}$:

$$\tau(D) \geqslant \tau(D \cap A^c) = \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c);$$

$$\tau(D) \leqslant \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c).$$

- $A \subseteq B \in \mathscr{F}$, $\tau(B) = 0$, K

$$\tau(A) \leqslant \tau(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathscr{F} .$$

§2.3 测度的扩Ü

- μ, ν 别 $\mathscr{E}, \overline{\mathscr{E}}$ 上的测度, 且$\mathscr{E} \subseteq \overline{\mathscr{E}}$. 若

$$\nu(A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{E},$$

K称ν μ 3$\overline{\mathscr{E}}$ 上的扩Ü.

- 扩Ü 惟一的: 若ν^1 也 μ 3$\overline{\mathscr{E}}$ 上的扩Ü, K$\nu^1 = \nu$.

例1. $X=\{a,b,c\}$, $\mathscr{E}=\{\varnothing,\{a,b\},\{b,c\},X\}$,

$$\mu(\varnothing)=0;\quad \mu(\{a,b\})=1;\quad \mu(\{b,c\})=1;\quad \mu(X)=2.$$

- μ $\mathscr{E}$ 上的测度, 且外测度

$$\tau(\varnothing)=0;\quad \tau(X)=\tau(\{a,c\})=2;$$

$$\tau(\{a\})=\tau(\{b\})=\tau(\{c\})=\tau(\{a,b\})=\tau(\{b,c\})=1.$$

- $\mathscr{F}$ $=\{\varnothing,X\}$. $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 不 扩Ü.

例2. $X = \mathbb{Q}$.

- π 系与Œ :

$$\mathscr{P} = \{X \cap (-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\},$$

$$\mathscr{Q} = \{X \cap (a, b] : -\infty < a \leqslant b < \infty\}.$$

- 令

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \mu(A) = \infty, \ \forall A \in \mathscr{P} \cup \mathscr{Q} \backslash \{\varnothing\},$$

$$\lambda \ (A) = \alpha |A|, \quad \forall A \in \sigma(\mathscr{Q}). \quad (\alpha > 0.)$$

- μ 不 σ 有限的; $\forall \alpha > 0, \lambda$ 都 μ 的扩Ü.

命题 (命题2.3.1, 扩 Ü 的唯一性)

设$\mathscr{P}$ 是π系. 若$\sigma(\mathscr{P})$ 上的 ÿ 度μ,ν 满足以下两条, 则$\mu=\nu$.

(1) $\mu|_{\mathscr{P}}=\nu|_{\mathscr{P}}$; (2) $\mu|_{\mathscr{P}}$ 是σ 有限的.

- 注: π 系上σ 有限的测度, 若可扩 Ü 到$\sigma(\mathscr{P})$, K 扩 Ü 惟一.
- 取$A_1,A_2,\dots\in\mathscr{P}$ 得$X=$ ° 8 n 1 A_n 且$\mu(A_n)<\infty$, $\forall n$.
- $\forall n$, $B(:=A_n)\in\mathscr{P}$ 满足$\mu(B)<\infty$. 往

$$\mu(A\cap B)=\nu(A\cap B),\quad \forall A\in\sigma(\mathscr{P}).$$

- 于 $\forall A\in\sigma(\mathscr{P})$,

$\mu(A)=$ 8 ¸ n 1 $\mu(A\cap A_n$ 8 ¸ n 1 $\mu(A\cap B_n$ (c

- $B \in \mathscr{P}$ 满足$\mu(B) < \infty$. 验

$$\mathscr{L} := \{A \in \sigma(\mathscr{P}) : \mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)\}$$

λ 系, 且$\mathscr{L} \supseteq \mathscr{P}$, 故$\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{P})$.

- $X \in \mathscr{L}$, ✓. $A_1, A_2 \in \mathscr{L}$, 且$A_1 \supseteq A_2$. 由$\mu(B) < \infty$,

$$\begin{aligned}\mu\big((A_1 - A_2)B\big) &= \mu(A_1B) - \mu(A_2B) \\ &= \nu(A_1B) - \nu(A_2B) = \nu\big((A_1 - A_2)B\big).\end{aligned}$$

- $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{L}$ 且$A_n \uparrow A$. K

$$\mu(AB) = \uparrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_nB) = \uparrow \lim_{n \to \infty} \nu(A_nB) = \nu(AB).$$

定理 (定理2.3.2, 测度扩Ü定理)

假设μ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的ÿ度, τ 为μ 生成的外ÿ度. 则

$$\sigma(\mathscr{Q}) \subseteq \mathscr{F}, \quad \tau|_{\mathscr{Q}} = \mu.$$

- 注1. Œ $\mathscr{Q}$ 上的测度可扩Ü到$\sigma(\mathscr{Q})$ 上.
- 注2. (推论2.3.3).

  若μ σ 有限的, Kμ 可惟一地扩Ü到$\sigma(\mathscr{Q})$.

  - 3惟一的扩Ü=为 $\tau|_{p\mathscr{Q}q}$.

- 往 :

$$\tau|_{\mathscr{Q}} = \mu, \quad \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{F}.$$

- (1) $\tau|_{\mathscr{Q}} = \mu$: b $A \in \mathscr{Q}$.

  一 面, 取$B_1 = A$, $B_n = \varnothing$, $n \geqslant 2$, K

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A, \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A).$$

- 另一 面, 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{Q}$ 得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$, K

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(AA_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(AA_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- 故, $\tau(A) = \mu(A)$.

- (3) $\forall A \in \mathscr{Q}$, 往 $A \in \mathscr{F}$. 需验 :

$$\tau(D) \geqslant \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c), \quad \forall D \in \mathscr{T}.$$

- 若$\tau(D) = \infty$, K✓. 下 $\tau(D) < \infty$.
- 取$B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{Q}$ 得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq D \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \tau(D) + \varepsilon.$$

- $\forall n$, P $\hat{D} := B_n$. 往

$$\mu(\hat{D}) = \tau(\hat{D}) \geqslant \tau(\hat{D} \cap A) + \tau(\hat{D} \cap A^c), \quad \forall \hat{D} \in \mathscr{Q}.$$

- (2) $\forall \hat{D} \in \mathscr{Q}$, $\hat{D} \cap A^c = \hat{D} \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, 于

$$
\begin{aligned}
\mu(\hat{D}) =& \mu(\hat{D} \cap A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \\
\geqslant& \tau(\hat{D} \cap A) + \tau(\hat{D} \cap A^c).
\end{aligned}
$$

- “ 入(3). $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq D \in \mathscr{T}$, $\tau(D) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. 于

$$
\begin{aligned}
\tau(D) + \varepsilon >& \sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(B_n \cap A^c) \\
\geqslant& \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c).
\end{aligned}
$$

- (4) $\tau|_{(\mathscr{Q})}$ 测度: $\sigma(\mathscr{Q}) \subseteq \mathscr{F}$.

定理 (定理2.3.4)

设τ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的ÿ 度μ 生成的外ÿ 度.

(1) $\forall A\in\mathscr{F}$, $\exists B\in\sigma(\mathscr{Q})$ 使得$B\supseteq A$ 且$\tau(A)=\tau(B)$;

(2) 若进一Ú μ 是σ 有限的, 则进一Ú $\tau(B\backslash A)=0$.

- (1) 若$\tau(A)=\infty$, K 取$B=X$. 下 $\tau(A)<\infty$.
- 取$B_{n;1},B_{n;2},\cdots\in\mathscr{Q}$ 得

$$B_n:=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n;k}\supseteq A \quad 且 \quad \sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_{n;k})<\tau(A)+\frac{1}{n}.$$

- $B:=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\supseteq A$, 故$\tau(B)\geqslant\tau(A)$.
- 另一 面, $B_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{n;k}\supseteq B$, 故

$$\tau(B)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_{n;k})<\tau(A)+\frac{1}{n}\to\tau(A).$$

- (2) 一步, $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $A_n\in\mathscr{Q}$ 且 $\mu(A_n)<\infty$.
- $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}AA_n$,

$$AA_n\in\mathscr{F} \quad 且 \quad \tau(AA_n)\leqslant\tau(A_n)=\mu(A_n)<\infty.$$

- 取 $B_n\in\sigma(\mathscr{Q})$ $B_n\supseteq AA_n$ 且 $\tau(B_n)=\tau(AA_n)$.
- $B=AA_n+B\backslash(AA_n)$, 故

$$\tau(B_n)=\tau(AA_n)+\tau(B_n-AA_n)$$

$$\Rightarrow\tau(B_n-AA_n)=\tau(B_n)-\tau(AA_n)=0.$$

- $B:=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\supseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}AA_n=A$, 且

$$\tau(B-A)=\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n-AA_n)\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\tau(B_n-AA_n)=0.$$

命题 (命题2.3.5, 测度的逼近)

设μ 是代数$\mathscr{A}$ 上的测度, τ 为μ 生成的外测度. 若$A \in \sigma(\mathscr{A})$ 且$\tau(A) < \infty$, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathscr{A}$ 使得$\tau(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$.

- 取$B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{A}$ 使得

$$\hat{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supseteq A \quad \text{且} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \tau(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- 取N 充分大, $B := \bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathscr{A}$,

$$\tau(A \backslash B) \leqslant \tau\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $\tau(B \backslash A) \leqslant \tau\left(\hat{B} - A\right) = \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) - \tau(A) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- $\tau(A \,\Delta\, B) = \tau(A \backslash B) + \tau(B \backslash A) < \varepsilon$.

定理 (定理2.3.6)

设$\mathscr{A}$ 是代数, μ 是$\sigma(\mathscr{A})$ 上的ÿ 度, 在$\mathscr{A}$ 上σ 有限. 若$A \in \sigma(\mathscr{A})$ 且$\mu(A) < \infty$, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathscr{A}$ 使得$\mu(A \quad B) < \varepsilon$.

- 由σ 有限 $\mu = \tau|$ p$\mathscr{A}$q.

§2.4 测度空 m 的完全

- $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 　测度空 m . 令

$$\overline{\mathscr{F}} := \{A \cup N : A \in \mathscr{F}, \exists B \in \mathscr{F} \quad \text{得 } \mu(B) = 0 \text{ 且 } N \subset B\}.$$

- 令

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A), \quad \forall A \cup N \in \overline{\mathscr{F}}.$$

- 定理2.4.1. $\overline{\mathscr{F}}$ 　σ 域. $\overline{\mu}$ 良定. $(X, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$ 　完备的测度空 m .
- 注: $\overline{\mu}(A) = \mu(A), \forall A \in \mathscr{F}$. 故$\overline{\mu}$ 为μ 的扩 Ü .
- 称$(X, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$ 为$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 的完备 　/完全 　.

定理 (定理2.4.1)

$\bar{\mathscr{F}}$ 是σ 代数. $\bar{\mu}$ 良定. $(X, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ 是完 的ÿ 度空间.

- $\bar{\mathscr{F}} := \{A \cup N\}$, $N \subseteq B$, $\mu(B) = 0$; $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$.
- (1) $\bar{\mathscr{F}}$ σ “ : $X = X \cup \varnothing \in \bar{\mathscr{F}}$;
- $(A \cup N)^c = A^c - A^c N = (A^c \backslash B) + A^c(B - N) \in \bar{\mathscr{F}}$;
- $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup N_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = A \cup N$,

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n =: B, \quad \mu(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

- (2) $\bar{\mu}$ 良定. 若$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, K $A_1 \cup B_1 \supseteq A_2$, 故

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cup B_1) \geqslant \mu(A_2), \quad 同理, \ \mu(A_2) \geqslant \mu(A_1).$$

- (3) $\bar\mu$ $\bar{\mathscr{F}}$ 上的测度:

$\bar\mu(\varnothing)=0$, $\bar\mu(A\cup N)\geqslant 0$, 且

$$\bar\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup N_n)\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cup N_n).$$

- (4) $(X,\bar{\mathscr{F}},\bar\mu)$ 完备:

若$C\subseteq A\cup N$, $\mu(A)=\bar\mu(A\cup N)=0$, K

$$C\subseteq A\cup B,\quad \mu(A\cup B)\leqslant\mu(A)+\mu(B)=0.$$

故$C=\varnothing\cup C\in\bar{\mathscr{F}}$.

定理 (定理2.4.2)

设τ 是半环$\mathscr{Q}$ 上的σ 有限 ÿ 度μ 生成的外 ÿ 度, 则$(X, \mathscr{F}, \tau)$ 是$(X, \sigma(\mathscr{Q}), \tau)$ 的完　化.

- $\mathscr{F} := \sigma(\mathscr{Q})$, 往　$\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$.
- $\overline{\mathscr{F}} := \{A \cup N\} \subseteq \mathscr{F}$: $(X, \mathscr{F}, \tau)$ 完备.
- $\overline{\mathscr{F}} \supseteq \mathscr{F}$: $\forall C \in \mathscr{F}$, 往　: $C = A + N$.
- $C^c \in \mathscr{F}$, 故$\exists B \in \mathscr{F}$　得

$$B \supseteq C^c \text{ 且 } \tau(B - C^c) = 0.$$

- P $A = B^c$, $N = B - C^c$ K $C = A + N$.

例. L-S测度与　布

- $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,　ü ! 右连续, K 称为准　布函　.
- ν 为Œ　$\mathscr{Q}_{\mathbb{R}}$ 上的测度, σ 有限.

$$\nu=\nu_F:(a,b]\mapsto(F(b)-F(a))\vee 0.$$

- P ν　成外测度为$\tau=\lambda_F$.
- 称$\mathscr{F}$　的 8 合为Lebesgue-Stieljes (L-S) 可测 8 ;
  $f:(\mathbb{R},\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 为L-S 可测函　; $\tau|_{\mathscr{F}_\tau}$ 为L-S 测度.
- 特别地, $F=\mathrm{id}$　, L 可测 8 ; L 测度, λ; L 可测函　.
- $(\mathbb{R},\mathscr{F},\tau)$ 为测度空 m , 完备 ! σ 有限.

- $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{Q}_{\mathbb{R}})$, 故$(\mathbb{R}, \mathscr{F}\ , \tau)$ $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \tau)$ 的完备 .
- $\mu = \mu_F = \lambda_F|_{\mathscr{B}_{\mathbb{R}}}$ 为ν 到$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathscr{Q}_{\mathbb{R}})$ 上的惟一的扩 Ü.
- 过来, b μ 为$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的测度.
- 若$\mu\ (a, b] < \infty, \forall a < b$, K $\mu = \mu_F$. (习题 ! 15)

$$F = F\ : x \mapsto \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R};$$

\#

$$F = F\ : 0 \mapsto 0; \quad x \mapsto \begin{cases} \mu((0, x]), & x > 0; \\ -\mu((x, 0]), & x < 0. \end{cases}$$

- 并且$\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \mathscr{F}\ _F$:

$$\mathscr{F}\ _F = \{A \cup N : A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \exists B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}\ \ \mu(B) = 0, N \subseteq B\}.$$

- 称$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的　率为　布.
- 　$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为准　布函　(　ü ! 右连续). 又若F 规　:

$$F(-\infty) := \lim_{x \text{N} \quad 8} F(x) = 0, \quad F(\infty) := \lim_{x \text{N} 8} F(x) = 1,$$

K 称F 为　布函　(d.f.). (P51 $\sim$ 52.)

- 　布与d.f.一一对应:

若μ 为　布, K F　为d.f.. 若F 为　布函　, K μ_F 为　布;

$$\mu = \nu \Rightarrow F \quad = F \ , \quad F = G \Rightarrow \mu_F = \mu_G.$$

定理 (定理3.2.10 (1))

设$g:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})$, μ 为$\mathscr{F}$ 上的ÿ 度. 令

$$\nu(B) := \mu(g^{-1}B) = \mu\circ g^{-1}(B), \quad \forall B\in\mathscr{S}.$$

则ν 是$\mathscr{S}$ 上的ÿ 度.

- ：ν ；且

$$g^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{-1}B_n$$

$$\Rightarrow \nu\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(g^{-1}B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n).$$

- $(\ ,\mathscr{F},P)$ 为 率空m，$f:(\ ,\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. 称

$$P\circ f^{\ 1}:B\mapsto P(f\in B),\quad \forall B\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$$

为f 的(率) 布，P 为μ_f.

- 若$\mu_f=\mu$，K称f l 布μ，P为$f\sim\mu$.
- 称$F_f:=F_{\ f}$ 为f 的 布函 .

$$F_f(x):=\mu_f((-\infty,x])=P(f\leqslant x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

- 若$F_f=F$，K也称f lF，P为$f\sim F$.
- 若$F_f=F_g$ (i $\mu_f=\mu_g$)，K称f 与g 同 布，P为

$$f\overset{d}{=}g.$$

构E随 变量/随 向量f 得$f \sim F$.

- 一！取$U \sim U(0,1)$: 取

$$= (0,1), \quad \mathscr{F} = \mathscr{B}_{p0;1q}, \quad P = \lambda|_{\mathscr{F}}, \quad U = \mathrm{id}.$$

- F 布函 . 左连续逆:

$$F^{Ð} : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant t\}.$$

- 引理2.5.5. $F^{Ð}$ ！ ü！左连续, 且

$$F^{Ð}(t) \leqslant x \Leftrightarrow F(x) \geqslant t.$$

- 任何d.f. 都 某r.v. 的d.f.. $f := F^{Ð}(U) \sim F$:

$$P(F^{Ð}(U) \leqslant x) = P(F(x) \geqslant U) = F(x).$$

- ！取 $= \mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, $P = \mu_F$. $f = \mathrm{id}$.

§2.5 可测函 的 敛性

- $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 测度空 m .
- 子 8 A = 关于 素x 的命题/性 .
- 若∃ 零测 8 N 得命题对所有的$x \in N^c$ 成立,

  K 说 命题 A 乎 ? ? (a.e.)成立. 注: μ-a.e..
- $f, f_1, f_2, \cdots$ 测度空 m $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函 .
- f A 乎 ? ? 有限; A 乎 ? ? 有 ; A 乎 ? ? 为0; $\cdots\cdots$
- 定义2.5.1. 若

$$\mu \quad \lim_{n\,N\,8} f_n \neq f \quad = 0,$$

  K 说$\{f_n\}$ A 乎 ? ? 以f 为 4 限.

  又若f a.e.有限, K 说$\{f_n\}$ A 乎 ? ? 敛到f, P 为$f_n \xrightarrow{a.e.} f$.
- 注: $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 默认f a.e. 有限.

- 定义2.5.2. 若$\forall\delta > 0$, $\exists A \in \mathscr{F}$ 得$\mu(A) < \delta$ 且

$$\lim_{n\,N\,8}\ \sup_{xRA} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

K说$\{f_n\}$ A乎一 敛到f. P为$f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

- 注: 3 A^c 上一 敛.
- 注: 不 A乎必然一 敛.

命题 (命题2.5.1)

$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$,

$\vdots$

μ

:

命题 (命题2.5.2)

$f_n \overset{\text{a.u.}}{\longrightarrow} f$ 当且仅当$\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{m\,\text{Ñ}\,8} \mu \quad \overset{8}{\underset{n \quad m}{}} \{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \quad = 0.$$

- $\Rightarrow$: $f_n \overset{\text{a.u.}}{\longrightarrow} f$

  $\forall \delta > 0, \exists A \in \mathscr{F}$ 得$\mu(A) < \delta$ 且$f_n(x) \overset{xPA^c}{\rightrightarrows} f(x)$.
- $f_n(x) \overset{xPA^c}{\rightrightarrows} f(x)$ ：固定$\varepsilon > 0$. $\exists m$ 得当$n \geqslant m$,

  $x \notin A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- 当$n \geqslant m$, $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon \Rightarrow x \in A$. = , $\star \subseteq A$.
- 令$\delta \to 0$ $\downarrow \lim_{m\,\tilde{\text{N}}\,8} \mu(\star) = 0$.
- $\Leftarrow$: $\forall \delta > 0, \exists m_k$ 得μ $\overset{„}{}\ \overset{8}{\underset{n \quad m_k}{}} \{|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\}$ $< \frac{}{2^k}$.
- $A = \overset{„}{}\ \overset{8}{\underset{k \quad 1}{}} A_k$, K $\mu(A) < \delta$, 且$f_n(x) \overset{xPA^c}{\rightrightarrows} f(x)$.

- 定义2.5.3. 若$\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \text{ N } 8} \mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

K称$\{f_n\}$依测度 敛到f. P为$f_n \to f$.

- 命题2.5.1. $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ i $\forall \varepsilon > 0$, μ ↓ $\lim_{„m \text{ N } 8}$ " $\overset{8}{\underset{n}{}}$ m A_n $= 0$.
- 命题2.5.2. $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ i $\forall \varepsilon > 0$, μ $\overset{8}{\underset{n}{}}$ m A_n $\searrow 0$.
- 定理2.5.3.

$$f_n \xrightarrow{a.u.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.e.} f \text{ 和 } f_n \to f.$$

若$\mu(X) < \infty$, K

$$f_n \xrightarrow{a.u.} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \to f.$$

定理 (定理2.5.4)

$f_n \to f$ 当且仅当$\{f_n\}$ 的任一子列存在其子列 $\{f_{n'}\}$ 使得

$$f_{n'} \xrightarrow{a.u.} f.$$

- $\Rightarrow$: 往 若$f_n \to f$, K • 3 $\{f_n\}$ 的 子列 $\{f_{n_k}\}$ 得$f_{n_k} \xrightarrow{a.u.} f$.
- $n_0 = 0$. 递归地取$n_k > n_{k\ 1}$ 得
$$\mu(|f_n - f| \geqslant \tfrac{1}{k}) \leqslant \tfrac{1}{2^k}, \quad \forall n \geqslant n_k.$$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \frac{1}{m} < \varepsilon$, $\{|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon\} \subseteq$ ($|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{k}$,
$$\mu \ " \ \overset{8}{k} \ m \star k \leqslant \mu \ " \ \overset{8}{k} \ m \star k \leqslant \ ° \ \overset{8}{k} \ m \ \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} \xrightarrow{m\tilde{N}8} 0.$$
- $\Leftarrow$: . K $\exists \varepsilon > 0$ 得$\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) \nrightarrow 0$.
- $\exists \delta > 0$ 9 子列$\{n_k\}$ 得$\mu(|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon) > \delta$.
- 不 • 3 $\{f_{n_k}\}$ 的子列$\{f_{n'}\}$ 得$f_{n'} \xrightarrow{a.u.} f$.

- 例1. $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, $f_n(x) = \mathbf{I}_{\{|x|\geq n\}}$. K

$$f(x) \to 0, \forall x \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.e.} 0 =: f.$$

- 取$\varepsilon = 1$, $\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = \infty$, $\forall n$. 故$f_n \to 0$ 不成立.
- 故$f_n \xrightarrow{a.u.} 0$ 不成立.
- 例2. $\left((0,1], \mathscr{B}_{(0,1]}, \lambda\right)$. $f_{k,i} = \mathbf{I}_{\{\frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k}\}}$, $i = 1, \cdots, k$.
- $n \leftrightarrow (k,i)$: $(f_1, f_2, \cdots) = (f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \cdots)$.
- $n \to \infty$ i $k \to \infty$.

$$\lambda(|f_n - f| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{k} \to 0,\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f_n \to f.$$

- $\forall x$, $f_n(x) \nrightarrow f(x)$. 故$f_n \xrightarrow{a.e.} 0$ 不成立. l ，$f_n \xrightarrow{a.u.} 0$ 不成立.

率空 m

- (,$\mathscr{F}$, P) 为 率空 m (p.s.),

  $f, f_1, f_2, \cdots$ 随 变量(r.v.).
- A 乎？？ 成为 A 乎必然.
- 例, $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 称为 A 乎必然 敛, P 为 $f_n \xrightarrow{a.s.} f$.
- $f_n \xrightarrow{P} f$ 称为依 率 敛.

- F 函 . P

$$C(F) := \{x : F \text{ 3 } x \text{ 连续}\}.$$

- $F, F_1, F_2, \cdots$ ü 的 函 . 若

$$\lim_{n \text{N} 8} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in C(F),$$

K 称$\{F_n\}$ 弱 敛到F，P 为$F_n \xrightarrow{w} F$.

- $F, F_1, F_2, \cdots$ 布函 ，$f_n \sim F_n$，$n = 1, 2, \cdots$
- 定义2.5.4. 若$F_n \xrightarrow{w} F$，K 称$\{f_n\}$ 依 布 敛到F，P 为$f_n \xrightarrow{d} F$.

  又若$f \sim F$，K 称$\{f_n\}$ 依 布 敛到f，P 为$f_n \xrightarrow{d} f$.

定理 (定理2.5.6)

$f_n \xrightarrow{P} f \;\Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f.$

- $$P(h \leqslant y) \leqslant P(h \leqslant y, |h-g| < \varepsilon) + P(h \leqslant y, |h-g| \geqslant \varepsilon)$$
  $$\leqslant P(g \leqslant y+\varepsilon) + P(|h-g| \geqslant \varepsilon).$$
- $F(x) = P(f \leqslant x)$, $F_n(x) = P(f_n \leqslant x)$.
- 取$h = f_n$, $g = f$, $y = x$.
  $$\limsup_{n\,\text{Ñ}\,8} F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon),\ \forall \varepsilon > 0.$$
  故, $\limsup_{n\,\text{Ñ}\,8} F_n(x) \leqslant F(x)$.
- 取$h = f$, $g = f_n$, $y = x - \varepsilon$.
  $$F(x-\varepsilon) \leqslant \liminf_{n\,\text{Ñ}\,8} F_n(x),\ \forall \varepsilon > 0.$$
- $\forall x \in C(F)$, $F(x) \leqslant \liminf_{n\,\text{Ñ}\,8} F_n(x)$. l $F_n(x) \to F(x)$.

定理 (定理2.5.8, Skorokhod 定理)

若 $f_n \xrightarrow{d} f$, 则存在概率空间 $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{F}}, \tilde{P})$ 与其上r.v. $\{\tilde{f}_n\}$ 和 $\tilde{f}$ 使得

$$\tilde{f}_n \overset{d}{=} f_n,\ n = 1, 2, \cdots \quad \tilde{f} \overset{d}{=} f, \quad \tilde{f}_n \xrightarrow{a.s.} \tilde{f}.$$

- 已 : $U \sim U(0,1) \Rightarrow F^{\text{Ð}}(U) \sim F$.
- 引理2.5.7. 若 $F_n \xrightarrow{w} F$, K $F_n^{\text{Ð}} \xrightarrow{w} F^{\text{Ð}}$.
- $\mathbb{R} \backslash C(F^{\text{Ð}})$ 可 . 故 $F_n^{\text{Ð}}(U) \xrightarrow{a.s.} F^{\text{Ð}}(U)$.
- 取 $F_n := F_{f_n}$, $F := F_f$ = 可.

- 可测函 ： f a.e. 定义. 可延拓为$\tilde{f}$:

$$\tilde{f} := f \cdot \mathbf{I}_{N^c}, \quad 其 \quad \mu(N) = 0.$$

- 若 9 可 函 ，K $f = g$ $f \overset{a.s.}{=} g$.
- $f_n \xrightarrow{a.s.} f$, $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, $f_n \to f$.
- r.v. a.s. 定义且有限.