1 一章、可测空　和可测映射

§1.1　合　其运算

1. ½ 义

- 空　(全　): X, 非空.
- 元素(:): $x, y, \cdots$.
- 　合(　　): $A, B, \cdots$,　空　: $\varnothing$.
- 符号:

$$x \in A,\ x \notin A,\ x \in A^c, A \subseteq B, A \cup B,\ AB = A \cap B,$$

$$B \backslash A \text{ (为强 N } A \subseteq B, \text{ 可用} B - A),\ A \Delta B.$$

- 交换　、结合　、分配　.
- 不交: $A \cap B = \varnothing$.　为强 N 不交, 可用$A + B$.

- 一 合$\{A_t, t \in T\}$:

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x : \exists t \in T \text{ 使 } x \in A_t\},$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t := \{x : x \in A_t,\ \forall t \in T\}.$$

- 两两不交: $A_t \cap A_s = \emptyset,\ \forall s \neq t.$

  为强 N 两两不交, 可用 $\sum_{n=1}^{N} A_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

- é 偶 (De-Morgan 法则):

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c, \qquad \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c.$$

- 单 N (　　合)序　:

$$\text{非}\quad,\ A_n\uparrow:\qquad A_n \subseteq A_{n\ 1},\ \forall n;$$

$$\text{非增},\ A_n\downarrow:\qquad A_n \supseteq A_{n\ 1},\ \forall n.$$

- 单 N 序　　限:

$$\text{若 } A_n\uparrow,\ \text{则}\ \lim_{n\,\check{N}\,8} A_n := \overset{8}{\underset{n\ \ 1}{}} A_n,$$

$$\text{若 } A_n\downarrow,\ \text{则}\ \lim_{n\,\check{N}\,8} A_n := \overset{£}{\underset{n\ \ 1}{}} A_n.$$

- 任意序 上 限:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

$$= \{x : \exists n_1 < n_2 < \cdots \text{使} \quad x \in A_{n_r}, \forall r \geqslant 1\} = \{A_n \text{ i.o.}\}.$$

- 任意序 下 限:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k = \{A_n^c \text{ f.o.}\}.$$

- 若上、下 限相 , 则称该序 限存在, 并

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

- 合系: A , B , $\cdots$
- π 系: P 非空; é 交运算封闭, ,

$$A, B \in P \Rightarrow A \cap B \in P .$$

- 例1. $X = \mathbb{R}$, $P_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.
- 半环: Q 是π 系, 若$A, B \in Q$ 且$A \supseteq B$, 则存在有限个两两不交 $C_1, \cdots, C_n \in Q$ 使

$$A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \biguplus_{k=1}^{n} C_k .$$

- 例2. $X = \mathbb{R}$, $Q_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. (: $\varnothing \in Q$.)
- ★★ 可去 K . (习题一、4)

- 环: R 非空, é 并、差运算封闭,

$$A, B \in R \Rightarrow A \cup B,\ A \backslash B \in R.$$

- : $A \cup B$ 可改为$A + B$: $A \cup B = A \backslash B + B$.
- 例4. $X = \mathbb{R}$, $R = \ 8\ n\ 1 \{\ n\ k\ 1 (a_k, b_k] : a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k\}$.
- 代数、域: A 是π 系, $X \in A$, 且 é 补运算封闭,

$$A \in A \Rightarrow A^c \in A.$$

- : 可 "π 系" 改为交运算封闭; 或去 K $X \in A$:

取 $A \in A \Rightarrow A^c \in A \Rightarrow \varnothing = A \cap A^c \in A \Rightarrow X = \varnothing^c \in A$.

- 命题1.2.1. 半环是π 系, 环是半环, 代数是环.
- 验 y R 为π 系: $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.
- y: $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, $A \backslash B = A \cap B^c$.
- 环= 半环 & é 并运算封闭, 代数= 环 & 含X(习题一、6).

- 单N系: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ 且A_n 单N, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$.
- λ 系:

$$X \in \mathcal{L}; \qquad A, B \in \mathcal{L} \text{ 且 } A \supseteq B \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{L};$$
$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{L} \text{ 且 } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{L}.$$

- σ 代数(σ 域):

$$X \in \mathcal{F}; \qquad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F};$$
$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

- 命题1.2.2. λ 系是单N系; σ 代数是λ 系.

- 命题1.2.3. σ 代数= 代数& 单 N 系.
- 命题1.2.4. σ 代数= λ 系& π 系.
- y “$\Leftarrow$” :

$$\overset{系}{\Rightarrow} A^c = X \setminus A \in \mathcal{F} \overset{系}{\Rightarrow} \text{代数} \overset{系}{\Rightarrow} \sigma \text{ 代数}.$$

- σ 环: $\mathcal{R}$ 非空; $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

- : ★ ¥ • 用验 y $A_1, A_2, \cdots$ 两两不交 情形 可.
- σ 环= 环 & 单 N 系, σ 代数= σ 环 & 含 X, (习题一、6).

- 若$\mathcal{F}$ 是X 上 σ 代数, 则称$(X, \mathcal{F})$ 为可测空 .
- 设A 是X 非空 , $\mathcal{E}$ 是 合系. ½ 义

$$A \cap \mathcal{E} := \{A \cap E : E \in \mathcal{E}\}.$$

- 习题一、13. $(X, \mathcal{F})$ 是可测空 . A 是X 非空 , 则$(A, A \cap \mathcal{F})$ 为可测空 .

从初 概 角Ý看可测空 : (X, F).

- 小 σ 代数: $\{\varnothing, X\}$,

  大 σ 代数: $T = T_X := \{A : A \subseteq X\}$.
- 有些模型¥, T 太大.
- “可测”:

$$X \in F; \qquad A \in F \Rightarrow A^c \in F;$$

$$A_1, A_2, \cdots \in F \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F.$$

§1.3 σ 代数　生成

- E 是非空　　合系.
- ½ 义1.3.1. 称G 为E 生成　环(单 N 系、λ 系、σ 代数), 若:
  (1) $G \supseteq E$, (2) é 任意⋆⋆ G^1,
  $$G^1 \supseteq E \Rightarrow G^1 \supseteq G.$$
- E 生成　⋆⋆ = 包含 E　　小　⋆⋆.
- 命题1.3.1. E 生成　⋆⋆存在.
- y:　包含E　所有⋆⋆　为A, 则$T \in$ A. “$\underset{G P \mathbf{A}}{\quad}$ G　为所求.
- 分别　为$r(E)$, $m(E)$, $l(E)$, $\sigma(E)$.

½ 理 (½ 理1.3.2)

若Q 是半环, 则

$$r(Q)=\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k : A_1,\cdots,A_n\in Q \text{ 且两两Ø交}\right\}.$$

- y : 环 é 并运算封闭, 故$r(Q)\supseteq G$.
- 反过来, 往 y G 为环: 非空✓; 设$A,B\in G$, 往 y $A\backslash B\in G$.
- 于是, $A\cap B=A\backslash(A\backslash B)\in G$.
- 进一步,

$$A\cup B=(A\backslash B)+(B\backslash A)+(A\cap B)\in G.$$

- 往 y $A\setminus B \in G$: 设 $A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_m \in Q$ 使

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\quad B=\bigcup_{j=1}^{m} B_j \in G.$$

- $A\setminus B = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i\setminus B) = \bigcup_{i=1}^{n}\left((A_i\setminus B_1)\setminus B_2\setminus\cdots\setminus B_m\right).$
- 往 é m 用归纳法, 以 y 明 $\star = \bigcup_{r=1}^{n_i} C_{i,r}$, 于是 y 毕.
- $m=1$ 时, 由半环性 Ÿ y.
- $m \to m+1$:

$$\star\setminus B_{m+1} = \left(\bigcup_{r=1}^{n_i} C_{i,r}\right)\setminus B_{m+1} = \bigcup_{r=1}^{n_i}(C_{i,r}\setminus B_{m+1}) = \bigcup_{r=1}^{n_i}\bigcup_{s=1}^{m_r} D_{i,r,s}.$$

两个 - 要 ½ 理 其推 .

- ½ 理1.3.3.

½ 理 (单 N 类 ½ 理)

若 A 是代数，则 $\sigma(A) = m(A)$.

- 推 1.3.4. $A \subseteq M \Rightarrow \sigma(A) \subseteq M$.
- ½ 理1.3.5.

½ 理 (λ-π ½ 理)

若 P 是 π 系，则 $\sigma(P) = l(P)$.

- 推 1.3.6. $P \subseteq L \Rightarrow \sigma(P) \subseteq L$.

½ 理 (½ 理1.3.3, 单 N 类 ½ 理)

若$\mathcal{A}$ 是代数, 则$\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$.

- $\sigma(\mathcal{A})$ 是单 N 系, 且$\supseteq \mathcal{A}$, 因此$\supseteq m(\mathcal{A})$.
- 反过来, 往 y $m(\mathcal{A})$ 是σ 代数, 且$\supseteq \mathcal{A}$, 因此$\supseteq \sigma(\mathcal{A})$.
- $m(\mathcal{A})$ 为单 N 系. 故, • 需验 y $m(\mathcal{A})$ 是代数.
- (1) 非空:

$$\mathcal{A} \text{ 是代数} \Rightarrow X \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A}).$$

- (2) 补运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A})$, $A^c \in m(\mathcal{A})$.
- 往 y $\mathcal{G} \supseteq m(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{G} := \{A : A^c \in m(\mathcal{A})\}. \ \mathcal{A} \in m \quad \text{q} \quad \text{m}^T$$

-

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- 往 y: (1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\star$, $\star$ 成立; (2) $\star$, $\star$ A 成单 N 系.
- (1) 固 ½ $A \in \mathcal{A}$. 往 y: $\forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.

  (1.1) $\forall B \in \mathcal{A}$, $\star$ 成立, ✓; (1.2) $\star$ B 成单 N 系.
- 引理: 若 $\mathcal{M}$ 是单 N 系, 则 $\forall C$, $\mathcal{G}_C$ 是单 N 系, 其 ¥

$$\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{M}\}.$$

- 引理 y 明:

$$D_n \in \mathcal{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \uparrow D \quad \Rightarrow \quad CD = \uparrow \lim_n CD_n \in \mathcal{M}.$$

$$D_n \in \mathcal{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \downarrow D \quad \Rightarrow \quad CD = \downarrow \lim_n CD_n \in \mathcal{M}.$$

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- $\forall A \in m(\mathcal{A})$, $\forall B \in m(\mathcal{A})$, $AB \in m(\mathcal{A})$.
- 往 y: (1) $\forall A \in \mathcal{A}$, ⋆, ⋆ 成立; (2) ⋆, ⋆ A 成单 N 系.
- (1) 固 ½ $A \in \mathcal{A}$. 往 y: $\forall B \in m(\mathcal{A})$, $AB \in m(\mathcal{A})$.

  (1.1) $\forall B \in \mathcal{A}$, ⋆ 成立, ✓; (1.2) ⋆ B 成单 N 系.
- 引理: $\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{M}\}$ 是单 N 系.
- 取 $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$, $C = A$. 改 $D = B$, • (1.2) ✓. 故(1) ✓.
- 取 $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$, $C = B$, 改 $D = A$, 则 ⋆, ⋆ A 成

$$\mathcal{G} = \underset{BPmpAq}{\text{£}} \mathcal{G}_B.$$

- $\mathcal{G}_B$ Ñ是单 N 系, 故 $\mathcal{G}$ 是单 N 系, (2) ✓.

½ 理 (½ 理1.3.5, λ-π ½ 理)

若 P 是π 系, 则$\sigma(P) = l(P)$.

- $\sigma(P)$ 是λ 系, 且$\supseteq P$, 因此$\supseteq l(P)$.
  反过来, 往 y $l(P)$ 是σ 代数, 且$\supseteq P$, 因此$\supseteq \sigma(P)$.
- • 需验 y $l(P)$ 是π 系, , é 交运算$A \cap B$ 封闭. 往 y

$$AB \in l(P), \quad \forall A \in l(P), \forall B \in l(P).$$

- 引理: 若 L 是λ 系, 则$\forall C \in L$, G_C 是λ 系.

$$G_C := \{D : CD \in L\}.$$

- (1) $\forall A \in P$, $\star$, $\star$ 成立:
  (1.1) $\forall B \in P$, $\star$ 成立, ✓; (1.2) G_A 为λ 系, ✓.
- $\star$, $\star$ A 成G = “ $_{BPlpPq}$ G_B 是λ 系, 故(2) ✓.

- 往 y 引理: $\mathsf{G}_C := \{D : CD \in \mathsf{L}\}, \forall C \in \mathsf{L}$.
- 复习λ 系 ½ 义:

$$X \in \mathsf{L}\ ; \qquad A, B \in \mathsf{L}\ \text{且}\ A \supseteq B \Rightarrow A \backslash B \in \mathsf{L}\ ;$$

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathsf{L}\ \text{且}\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathsf{L}\ .$$

- (1) $X \in \mathsf{G}_C$, 因为$CX = C \in \mathsf{L}$.
- (2) 若$D_1, D_2 \in \mathsf{G}_C$ 且$D_1 \supseteq D_2$, 则$D_1 - D_2 \in \mathsf{G}_C$:

$$CD_1, CD_2 \in \mathsf{L}\ , CD_1 \supseteq CD_2 \Rightarrow C(D_1 - D_2) = CD_1 - CD_2 \in \mathsf{L}\ .$$

- (3) 若$D_n \in \mathsf{G}_C$, $\forall n$ 且$D_n \uparrow D$, 则$D \in \mathsf{G}_C$:

$$CD_n \in \mathsf{L}\ , CD_n \uparrow \Rightarrow CD = \uparrow \lim_{n\,\text{Ñ}\,8} (CD_n) \in \mathsf{L}\ .$$

Borel 　.

- X 为拓扑空　, $\mathcal{O}$ 为所有开　成　合系.
- 称 $\mathcal{B}_X := \sigma(\mathcal{O})$ 为 X 上　Borel σ 代数/Borel　合系.
  若 $B \in \mathcal{B}_X$, 则称 B 为Borel　.
- 称 $(X, \mathcal{B}_X)$ 为拓扑可测空　.

§1.4 可测映射与可测函数

- 映射, $f: X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$.
- y: 函数Š, x 处 f Š.
- 原像: $B \subseteq Y$, $\mathcal{E}$ 是Y 上 合系,

$$f^{-1}B := \{x : f(x) \in B\}, \quad \text{也 为 } f^{-1}(B), \{f \in B\},$$
$$f^{-1}\mathcal{E} := \{f^{-1}B : B \in \mathcal{E}\}.$$

- 命题1.4.1.

$$f^{-1}\varnothing = \varnothing, \quad f^{-1}Y = X,$$
$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subseteq f^{-1}B_2, \quad f^{-1}B^c = f^{-1}(B^c),$$
$$f^{-1}\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} f^{-1}A_t, \quad f^{-1}\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} f^{-1}A_t.$$

命题 (命题1.4.2)

对Y 上的任意　空集合系E,

$$\sigma(f^{\ 1}E) = f^{\ 1}\sigma(E).$$

- y: $f^{\ 1}\sigma(E)$ 是σ 代数, 且$\supseteq f^{\ 1}E$, 从而$\supseteq \sigma(f^{\ 1}E)$.
  反过来, 往 y $f^{\ 1}\sigma(E) \subseteq \sigma(f^{\ 1}E)$, ,
  $$\forall B \in \sigma(E) \quad \text{Ñ} \qquad f^{\ 1}B \in \sigma(f^{\ 1}E).$$
- - : : 往验 y G 是σ 代数. 它 $\supseteq E$, 故 $\supseteq \sigma(E)$.
  $$G := \{B \subseteq Y : f^{\ 1}B \in \sigma(f^{\ 1}E)\}.$$
- 验 y : $f^{\ 1}\varnothing = \varnothing, \quad f^{\ 1}Y = X,$
  $$B_1 \subseteq \underset{\text{¤}}{B_2} \Rightarrow f^{\ 1}\underset{\text{¤}}{B_1} \subseteq f^{\ 1}B_2, \qquad \underset{\text{£}}{f}^{\ 1}B^{\ c} \underset{\text{£}}{=} f^{\ 1}(B^c),$$
  $$f^{\ 1}\underset{tPT}{\ }A_t = \underset{tPT}{\ } f^{\ 1}A_t, \quad f^{\ 1}\underset{tPT}{\ }A_t = \underset{tPT}{\ } f^{\ 1}A_t.$$

- 设$(X, \mathcal{F})$与$(Y, \mathcal{S})$为两个可测空 ，$f : X \to Y$.
- 若$f^{-1}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, 则称$f$ 为可测映射/随机元/可测 ， 为

$$f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{S}) \quad 或 \quad (X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{S}) \quad 或 \quad f \in \mathcal{F}.$$

- f 可测 • : $f^{-1}B \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{S}$. / , $\sigma(f) \subseteq \mathcal{F}$, 其¥,

$$\sigma(f) := f^{-1}\mathcal{S}$$

为使f 可测 小σ 代数, 称为f 生成 σ 代数.

- ½ 理1.4.3. 设$\mathcal{E}$ 是Y 上 非空 合系. 则

$$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \sigma(\mathcal{E})) \Leftrightarrow f^{-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}.$$

- ½ 理1.4.4. 若$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{S}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{Z})$, 则$g \circ f$ 可测.
- y : $\forall C \in \mathcal{Z}$, $g^{-1}C \in \mathcal{G}$, 故$(g \circ f)^{-1}C = f^{-1}(g^{-1}C) \in \mathcal{F}$.

- 广义实数: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.
- 序与区 : $-\infty < a < \infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$; 如, $[-\infty, a]$.
- 四则运算: $\pm\infty \times 0 := 0$; 如, $\infty - \infty$, ∞/∞ 无意义.
- 部与负部: $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$a \quad = a \vee 0, \quad a \quad = (-a) \vee 0.$$

- $a = a \quad - a \quad , \quad |a| = a \quad + a \quad .$
-

$$B_{\overline{\mathbb{R}}} := \sigma\left(B_{\mathbb{R}} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}\right).$$

- 命题1.4.5. $B_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}) = \cdots$

- ½ 义1.4.1. 可测函数 •

$$f:(X,\mathcal{F})\to(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}).$$

随机变量 •

$$f:(X,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}}),$$

也称为有限　可测函数, 可测实 Š 函数.

½理（½理1.4.6)

$(X, \mathcal{F})$ • 可ÿ空间.

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \quad (\text{或} f : X \to \mathbb{R}),$$

则 f • 可ÿ函数(或随机C量r.v.) 当且仅当

$$\{f \leqslant a\} \in \mathcal{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- r.v. 版: $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$. 则

$$f \text{ 可测 } \quad \text{iff} \quad \sigma(f) = f\ {}^{1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\ f\ {}^{1}\mathcal{E} \quad \subseteq \mathcal{F}$$

$$\text{iff} \quad f\ {}^{1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}.$$

- 可测函数版: $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{[-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$.

- 例1. $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 可测.
- 例2. $f \equiv a$ 可测.
- 例3. 示性函数/ • 示函数$\mathbf{I}_A$ 可测, $\forall A \in \mathcal{F}$;
- 例4. 阶梯函数

$$a_1 \mathbf{I}_{A_1} + \cdots + a_n \mathbf{I}_{A_n}$$

  可测, 其¥, $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交, $a_1, \cdots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Borel 函数 • $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

  例: 连续函数是Borel 函数.
- 例. 若f 是r.v., g 是Borel 函数, 则$g(f) = g \circ f$ 也是r.v..
- 推 1.4.7. 若f, g 是可测函数, 则$\{f = a\}, \{f < g\}, \cdots \in \mathcal{F}$.

§1.5 可测函数 运算

½理 (½理1.5.1)

可ÿ函数的四则运算(若有意义，则)可ÿ.

- 如: 若f, g 可测, $f+g$ 不出现$\infty + (-\infty)$ 情形, 则$f+g$ 可测.
- ÿ : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f+g<a\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

$$A_1 := \{f=-\infty, g<\infty\} \cup \{f<\infty, g=-\infty\} \in F\,,$$

$$A_2 := A \cap (\{f=\infty, g>-\infty\} \cup \{f>-\infty, g=\infty\}) = \varnothing \in F\,,$$

$$A_3 := A \cap \{-\infty < f, g < \infty\} = \{f < a - g\} \cap \star$$

$$= \underset{r\mathrm{P}\mathbb{Q}}{\text{¤}} \{f<r\} \cap \{r<a-g\} \ \text{£} \ \star \in F\,.$$

½ 理 (½ 理1.5.2)

可 ÿ 函数的极值与上、下极限都可 ÿ.

- Š: 如, 若 $f_1, f_2, \cdots$ 可测, 则 $\inf_{n\text{¥}1} f_n$ 可测, 因为

$$\text{"}\inf_{n\text{¥}1} f_n \geqslant a\text{*} = \overset{\text{₤}}{\underset{n\ \ 1}{}}\{f_n \geqslant a\}.$$

- : $\text{"}\inf_{n\text{¥}1} f_n > a\text{*} \subseteq \text{“}\overset{8}{\underset{n}{}}{}_1\{f_n > a\} \subseteq \text{"}\inf_{n\text{¥}1} f_n \geqslant a\text{*}.$

- 特别 / , f 可测, 则 $f = f \vee 0$ 与 $f = (-f) \vee 0$ 可测.

- 限:

$$\liminf_{n\text{Ñ}8} f_n = \sup_{N\text{¥}1} \inf_{n\text{¥}N} f_n.$$

- X 有限分割•: $\{A_1, \cdots, A_n\}$

  $A_1, \cdots, A_n \subseteq X$, 两两不交, 且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.
- (X, F) 有限可测分割•:

  进一步, $A_1, \cdots, A_n \in F$.
- 单函数•:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

其¥, $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为有限可测分割, $a_1, \cdots, a_n$ 是实数.
- 有界函数•: $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in X$.
- ：：收敛 $f_n \to f$ •:

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X.$$

½理（½理1.5.3)

若f 可ÿ，则存在简单的$f_1, f_2, \cdots$ 使$f_n \to f$. (a) 若$f \geqslant 0$, 则$f_n \geqslant 0$, $\forall n$ 且$f_n \uparrow f$; (b) 若f 有界, 则$f_n \rightrightarrows f$.

- 设$f \geqslant 0$. 取

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n 1_{\{f \geqslant n\}}.$$

- $f_n \geqslant 0$, $f_n \uparrow$. 并且$f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$, 因为

$$\begin{aligned} &0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 1/2^n, && f(x) < n; \\ &n = f_n(x) \leqslant f(x), && f(x) \geqslant n. \end{aligned}$$

- 又若f 有界 M, 则$\star$, $\forall n \geqslant M$, 故$f_n \rightrightarrows f$.
- f 可测, 则$f = f \;\; - f$, 考 f 可.

½理 (½理1.5.4)

设$g : (X, F) \to (Y, S)$. 则

$(X, g^{\ 1}S) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ i $h = f \circ g$, 其中, $(Y, S) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$.

- : $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ 可改为$(\overline{\mathbb{R}}, B_{\overline{\mathbb{R}}})$ 或$([a, b], [a, b] \cap B_{\mathbb{R}})$.
- $\Leftarrow$ ✓, 往 y $\Rightarrow$.
- ; 型方法: 为 y ⋆⋆, $\forall h \in g^{\ 1}S$, 往依次验 y ⋆⋆, $\forall h \in \mathcal{H}_i$:

$\mathcal{H}_1$: 示性函数; $h = \mathrm{I}_A$, $\forall A \in g^{\ 1}S$;

$\mathcal{H}_2$: 非负 单函数; $h = a_1 \mathrm{I}_{A_1} + \cdots + a_n \mathrm{I}_{A_n}$, $a_i \geqslant 0$; $\forall i$;

$\mathcal{H}_3$: 非负可测函数; $h_n \uparrow h$;

$\mathcal{H}_4$: 可测函数; $h = h \ \ - h \ \ $.

- : $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$, 需⋆⋆ é 非负线性运算封闭, 限封闭.

½理 (½理1.5.4 f 必要性)

$(X, g^{-1}S) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}) \Rightarrow h = f \circ g$, 其中, $(Y, S) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$.

- $\mathcal{H}_1$: 设$h = \mathbf{1}_A$, 其¥ $A \in \sigma(g)$. 则

$$A = g^{-1}B,\ B \in S \Rightarrow f = \mathbf{1}_B \quad 可.$$

- $\mathcal{H}_2$: 设h 非负 单, , $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, 其¥ $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为可测分割, $a_1, \cdots, a_n$ 两两不 . 则

$$\exists B_i \in S \ 使 A_i = \{h = a_i\} = g^{-1}B_i \Rightarrow h = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{B_i}\right) \circ g.$$

- $\mathcal{H}_3$: 设h 非负可测. $\exists h_n$ 非负 单, $h_n \uparrow h$.

$$h_n = f_n \circ g,\ \forall n \Rightarrow h = f \circ g,$$

其¥, $f(y) := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f_n(y), & \text{若 限存在且有限}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

- $\mathcal{H}_4$: 设h 可测, 则$h = h \quad - h \quad = (f \quad - f \quad) \circ g$.

- 一般/, 为验y $\star\star$, $\forall h \in \mathcal{H}_1$. , $h = \mathrm{I}_A$, $\forall A \in \mathcal{F}$. 往验y:

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : \mathrm{I}_A \quad \star\star\} \supseteq \mathcal{F}.$$

- 找代数$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ 使 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, 并y明$\mathcal{G}$ 是单N系.
- 或, 找π 系$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}$ 使 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$, 并y明$\mathcal{G}$ 是λ 系.

- 非负广义实Š函数 成 单N类•:

$$f, g \in \mathcal{M}, a, b \in \mathbb{R},\ af + bg \geqslant 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{M},\ f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{M}.$$

- ½理1.5.5. 设$\mathcal{A}$ 是代数, $\mathcal{M}$ 是⋆⋆. 若$\mathrm{I}_A \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{A}$, 则$(X, \sigma(\mathcal{A}))$ 上 非负可测函数均在$\mathcal{M}$ ¥.
- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: $\mathcal{G}$ 是单N系,

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : \mathrm{I}_A \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{A}).$$

- $\to \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$: $\mathcal{M}$ é 非负线性运算封闭.

- 非负广义实Š函数 成 λ 类•:

$$1 \in \mathcal{L};$$

$$f, g \in \mathcal{L},\ a, b \in \mathbb{R},\ af + bg \geqslant 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{L},\ f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{L}.$$

- ½理1.5.6. 设P 是π 系, $\mathcal{L}$ 是⋆⋆. 若$\mathrm{I}_A \in \mathcal{L}, \forall A \in P$, 则$(X, \sigma(P))$ 上 非负可测函数均在$\mathcal{L}$ ¥.
- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: G 是λ 系,

$$G := \{A \subseteq X : \mathrm{I}_A \in \mathcal{L}\} \supseteq P \Longrightarrow G \supseteq \sigma(P).$$

- $\to \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$: $\mathcal{L}$ é 非负线性运算封闭.