段往¯

——追 李忠老“

周Þ

2021.12.21

八二 秋天，北Œê学X招Â 百五›多个新)，我´其中之 。我们 级分 o个小班。Œ‘全 级 起上，S题‘小班分m上。 级上学期Úe学期，李忠老“给我们 级讲Ç《ê学分析》的Œ‘，张心明老“ú任 班Ú二班的助 ，同ž兼任 班的班主任。田小 老“ú任三班Úo班的助 ，同ž兼任三班的班主任。吴宝‰老“ú任 级主任。后来 为李老“弟子的方丽萍同学在二班，wB珍同学在o班，而我在三班。Ž当 ，李老“刚l瑞¬Zurich Œ学访学回I，´X里屈指Œê的改革m放后 访8I的老“。¦在I外学到 许多k 的ê学gŽ， 备ƒ当的I际À 。¦ ž只有o›•，风华正茂，才华î ， 气风发，魅力›足。我们 级é幸运地由¦这 的老“来执 。八五 S季学期，¦又 L我们 级的《复变¼ê》。跟‘李老“学L三个学期，我学到 许多分析的硬功夫。我后来l¯偏微分方 的研 ´ 为我对我的分析功底é有信心，而我的分析基:得 于李老“的谆谆 诲。八› “Ú › “ê学X还在 院，每个 研¿在X里只有 个办公¿。李老“á于¼ê 研¿。¦每周给我们上两gŒ‘，每gŒ‘两个小ž。张老“Ú田老“在李老“的指导e每周给我们上 gS题‘，每g两小ž。 外，李老“每周还在 研¿安 两小ž的‰ 。 个 “老“们 学极为认真，同学们学S 极为勤奋。李老“讲‘重点突 ， 入浅 ，听¦讲‘´ 种•É。¦平 人，Ú蔼Œ亲， É同学们的爱•。l八二 到y在 三› ，但有件¯我印–é ，至 回Ž起来仍历历在 。

记得´ 秋的 个e午，我去找 研¿找李老“‰ 。李老“刚给我们讲完这 的 个定理：闭区间上的连续¼ê 致连续。当ž我们才 > 点点¢ê理 Ú极•理 ，这个定理的证明w得非 奥Ú复杂。我找 个简ü¼ê$\sqrt{1-x^2}$(ü位圆的 部分)，Ž根 定 直 证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上 致连续，即证明

对于任 ″ > 0，•在 = (″) > 0¦得当$x_1;x_2 \in [0;1]$且$|x_1 - x_2| \le$ ž，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| < ″: \qquad (1)$$

当ž我的Ž法´证明

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &= \left|\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\right| \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &< ":\end{aligned}$$

但´我遇到 Œ 烦。•然$|x_2-x_1|$Œ 选取é小，但当$x_1;x_2$ 1ž$\sqrt{1-x_1^2}$Ú$\sqrt{1-x_2^2}$ Œ é小。于´后面的不等ª没法›制。我百g不得其 ，只Ð去找李老“‰ 。

见 李老“，¦k让我讲 讲我的g Ú困惑. 听完后，¦轻描淡写地`：“ 不´³ $x_1;x_2$ 1 ? 么 k假 $x_1;x_2$在1附 ，这žÿ$\sqrt{1-x_1^2}$, $\sqrt{1-x_2^2}$都 0, §们的 当然Œ 任 小。如Jx_1离1有 个正的 离， 写的不等ª的分 有正的e ，这ž不等ª Œ›制 。”当ž我茅塞顿m，恍然Œ悟。原来证明Œ 如d直 当，如d简明扼 。用ê学语言来讲，李老“的证明如e：

不妨 $x_1 < x_2$. 由$\sqrt{1-x^2}$的连续性，•在 ${}_0 \in (0;1)$, ¦得当$x \in [1-{}_0;1]$ž，

$$\sqrt{1-x^2} < ":$$

分两种情形讨 。

(1) $x_1 \in [1-{}_0;1]$.

dž w然

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2} \le \sqrt{1-x_1^2} < ":$$

(2) $x_1 \in [0;1-{}_0]$.

这ž

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-(1-{}_0)^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{{}_0}}:\end{aligned}$$

取 ${}_1 = \frac{"\sqrt{{}_0}}{2}$，则当$|x_1-x_2| \le {}_1$ž，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| < ":$$

综上，取 $= \min\{{}_0;{}_1\}$, 当$|x_1-x_2| \le$ ž，不等ª(1) 立。

我原k的Ž法´奔着证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上´Lipschitz¼ê的 子去的，但 个Œ导的Lipschitz¼ê的导ê 定有 ，而$\sqrt{1-x^2}$的导ê在1的附 无 。 d我的g 不Œ对头。而李老“的证明的巧妙之?在于将区间$[1-{}_0;1]$刨掉，然后在区间$[0;1-{}_0]$上• 问题。w然在d区间上$\sqrt{1-x^2}$ 足Lipschitz条件。李老“的证明Œ刀阔斧，简üo放。对于刚入学的 学者来`，简ü 懂。当ž我 得¦的证明•

Ð，但仍然不 么 人 ，然而我 Ž不 更Ð的办法。 日我又重新" À ¼ ê $\sqrt{1-x^2}$，终于找到 个简 的证明。证明如e：

k证明不等ª

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\leq\sqrt{2(x_2-x_1)};\quad 0\leq x_1\leq x_2\leq 1; \tag{2}$$

即¼ ê $\sqrt{1-x^2}$ ´ $\frac{1}{2}$ Hölder连续的，然后取 = $\frac{"^2}{2}$, 则不等ª(1) 立。

不等ª(2) ´ 如Û发y的 ？将¼ ê $\sqrt{1-x^2}$的x换 $1-x$，则得到¼ ê $\sqrt{1-(1-x)^2}$。在0点附 ，这个¼ ê 不多 ´ $\sqrt{2x}$, 而$\sqrt{x}$ ´ $\frac{1}{2}$ Hölder连续的，即

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\leq\sqrt{x_2-x_1};\quad 0<x_1\leq x_2: \tag{3}$$

ê p 等 给 ê p‡ " 的

于´ 猜测$\sqrt{1-x^2}$在[0; 1]上$\frac{1}{2}$ Hölder连续，即不等ª(2). 至于不等ª(2)，只需将第二 ' '到右端，两边平方，即Œ证明。这个证明é漂 ，但 给 学者讲清 证明g Ž，却不´ 么容 。还´李老"的证明更直 ，更容 被人 É。

这学期我在北Œ给 级本‰) 高等ê p 等p 在