PROOF OF RATNER'S THEOREM FOR SEMISIMPLE GROUPS

LEI YANG (SICHUAN UNIVERSITY)

1. Introduction

In 1975, Raghunathan proposed two fundamental conjectures on rigidity of unipotent actions on homogeneous spaces: Raghunathan's topological conjecture and measure conjecture. Ratner managed to prove these two conjectures in full generality around 1990 in several seminal papers [1990, Acta], [1990, Inventiones], [1991, Annals] and [1991, Duke].

According to Ratner's theorem on measure rigidity, for any homogeneous space G/Γ with a one-parameter unipotent subgroup $U = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$, any U-invariant and ergodic probability measure μ on G/Γ is homogeneous, that is, there exists a periodic orbit Fx of some analytic subgroup $F \subset G$ such that μ is induced by the Haar measure μ_F of F. This implies the following Ratner's theorems on orbit closure and equidistritbuion: For any $x \in G/\Gamma$, the closure of the orbit Ux is a periodic orbit Fx of some analytic subgroup $F \subset G$, and the orbit Ux is equidistributed in Fx with respect μ_F in the following sense: For any compactly supported continuous function $f \in C_c(G/\Gamma)$,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(u(t)x)\mathrm{d}t = \int_{Fx} f \mathrm{d}\mu_F.$$

Ratner's theorems have many important applications to number theory, and the ideas in the proof inspired several important breakthroughs in dynamical systems, such as the work by Einsiedler-Katok-Lindenstrauss on measure rigidity of higher rank diagonal actions on homogeneous spaces (Lindenstrauss' fields medal work), the work by Benoist-Quint on classifications of stationary measures of random walks on homogeneous spaces, and the work by Eskin-Mirzakhani on measure classification of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariant measures on moduli spaces (Mirzakhani's fields medal work).

The goal of this short course is to understand Ratner's proof of measure rigidity for semisimple G [1990, Acta]. This is the most important and difficult case. The proof contains most key ideas and techniques.

2. Outline of the course

The course is organized as follows:

(1) In the first lecture, we will briefly go through the history around Raghunathan's conjecture and Ratner's theorems, and talk about some important applications of Ratner's theorems.
(2) In the second lecture, we will start the proof of Ratner's measure classification theorem for the case where G is semisimple. We will prove several important properties of unipotent actions.
(3) In the third lecture, we will statement the key lemma and start proving it. This will be the main part of the whole proof.

(4) In the fourth lecture, we will finish the proof of key lemma and briefly describe how to deduce the measure rigidity result from the key lemma.

We will closely follow Ratner's paper [1990, Acta]. The course is self-contained.

3. References

[1] Marina Ratner, On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups, Acta Math., 165, 229-309, 1990.

[2] Marina Ratner, Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups, Invent. Math., 101, 449-482, 1990.

[3] Marina Ratner, On Raghunathan's Measure Conjecture, Annals Math., 134(3), 545-607, 1991.

[4] Marina Ratner, Raghunathan's Topological Conjecture and distributions of unipotent flows, Duke Math. J., 63(1), 235-280, 1991.

半单情形 !"#$%& 度分 定 '

"'四川大学'

'

一、 介 '

""""!"()*$"#)"$ 于 +,-. 年 出了两个关于 性 中幂幺子 作 刚性 基 想：!"()*$"#)"$ 想和 !"()*$"#)"$ 度 想。!"#$%& 在 +,,/ 年左右发 了一 列开创性 【+,,/，01#"】【+,,/，2$3%$#45$%6】【+,,+，0$$"76】【+,,+，8*9%】，在 意义下完全 了 两个 想。如今 一 列 为 !"#$%& 定 ， 性动力 域具 意义 。'

""" !"#$%& 度分 定 ， 定一个 性 以及一个幂幺子 作 ，其上 任意一个关于 幂幺子 作 历 度 代 ：即 度必 在一个子 周 上， 且 子 上 :""& 度 导 。 个分 定 个 !"#$%& 定 心， 它可以 出 !"#$%& 包定 和均匀分布定 ： 性 上 任何一个幂幺子 成 包必 一个子 周 ， 且 幂幺 在 个子 周 上关于 子 :""& 度均匀分布。'

""""!"#$%& 定 在 上 很多 应 ， 如 !"#$%& 定 可以 出 中 名 ;<<%$)%4= 想。 想于 +,>? 年 @"&(*746 ， 也 性动力 。另外，!"#$%& 定 思想启发了之后动力 域 大 ， 如：A4$64%B7%&CD"#59CE4$B%$6#&"*66 对于 性 中 对 子 作 度分 定 （ E4$B%$6#&"*66 尔兹奖 主 工作）；F%$546#CG*4$# 对于 性 中 定 度 分 定 ；以及 A694$C@4&H"9)"$4 对于 中关于 IEJKL!M不变 度 分 定 （ @4&H"9)"$4 尔兹奖 主 工作）。'

""" 介 性 为半单 商 !"#$%& 度分 定 【+,,/，01#"】。 个 !"#$%& 定 主体 分，包含了 !"#$%& 定 中 大 分关 想 。'

'

二、 安 '

（+）在 一 中， 们 单将回 一下关于 !"()*$"#)"$ 想和 !"#$%& 定 发展历史，介 !"#$%& 定 几个在 中 应 。'

（K）在 二 中， 们将开始半单情形 !"#$%& 度分 定 。 们将幂幺作 一些 性 。'

（N） 三 中， 们将 中 关 引 并开始它 。 关 引 个 主 分。'

（O） 四 中， 们将完成关 引 ，并 关 引 完成 个分 定 。'

们 于 !"#$%& 【+,,/，01#"】。'

三、参 '

[+P'@"&4$"'!"#$%&L';$'=%"6*&%'&4(4B4#Q'5R'*$4<5#%$#'6*S(&5*<6'5R'6%=464=<7%'(&5*<6L'O1#""@"#)TL'+?.L'KK,CN/,L'+,,/T"

'

UKP'@"&4$"'!"#$%&L'I#&41#'=%"6*&%'&4(4B4#Q'R5&'*$4<5#%$#'6*S(&5*<6'5R'6573"S7%'(&5*<6L'2$3%$#T""""@"#)TL'+/+L'OO,CO>KL'+,,/T"

'

UNP' @"&4$"' !"#$%&L' ;$' !"()*$"#)"$V6' @%"6*&%' W5$X%1#*&%L' O$$"76' @"#)TL' +NOJNML' .O.C?/-L'
+,,+T''
'

UOP' @"&4$"' !"#$%&L' !"()*$"#)"$V6'' Y5<575(41"7' W5$X%1#*&%' "$B' B46#&4S*#45$6' 5R' *$4<5#%$#'
R75Z6L'8*9%'@"#)T'[TL'?NJ+ML'KN.CK>/L'+,,+T''
'